חשבון איפני 1 למדמ"ח

שיעור 4: דיפרנציאל, ישר משיק, פונקציות הפיכות והפוכות

הגדרה: בהינתן עקומה $y=f(x)$ בעלת שיפוע $f'(a)$ בנקודה (a,b), כאשר $f(a)=b$, **הישר המשיק** לעקומה זו בנקודה (a,b) הינו ישר העובר בנקודה (a,b) ובעל שיפוע $f'(a)$.

משוואת המשיק הינה : $l(x)=f'(a)(x-a)+b$.

תרגיל 1: מצאו את משוואת המשיק לעקומה $y=\sqrt{x-1}$ בנקודה $(5,2)$.

פתרון: נמצא את שיפוע המשיק בנקודה $(5,2)$:

$$f'(5)=st\left(\frac{\sqrt{4+\vartriangle x}-2}{\vartriangle x}\right)=...=st\left(\frac{1}{\sqrt{4+\vartriangle x}+2}\right)=\frac{1}{4}$$ (עשינו כפל בצמוד וכו')

ולכן משוואת המשיק היא : $l(x)=\frac{1}{4}(x-5)+2=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

דיפרנציאל

נסמן את שינוי ה- y לאורך העקומה כאשר x משתנה מ- x ל- $x+\vartriangle x$ ע"י $\vartriangle y=f(x+\vartriangle x)-f(x)$

משפט (increment theorem): יהי $y=f(x)$ ונניח ש- $f'(x)$ קיימת בנקודה מסוימת x ו- $\vartriangle x\approx 0$, אזי $\vartriangle y\approx 0$ ומתקיים $\vartriangle y=f'(x)\vartriangle x+\varepsilon\vartriangle x$ עבור $\varepsilon(x,\vartriangle x)\approx 0$.

משפט: תהי $y=f(x)$

1. דיפרנציאל של x זהו משתנה בלתי תלוי $dx=\vartriangle x$.
2. דיפרנציאל של y זהו משתנה תלוי dy ונתון ע"י $dy=f'(x)dx$.

   אם $dx\neq 0$ ניתן לרשום $\frac{dy}{dx}=f'(x)$.

הערה: $\vartriangle y$ שינוי של y לאורך העקומה

dy שינוי של y לאורך המשיק .

תרגיל 2: עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את תחומי ההגדרה של הפונקציה ושל הנגזרת. בנקודות בהן הנגזרת קיימת מצאו את $\varepsilon(x,\vartriangle x)$ המקיים $\vartriangle y=dy+\varepsilon\vartriangle x$. הוכיחו ש- $\varepsilon(x,\vartriangle x)$ שמצאתם אינפיניטסימלי כאשר $\vartriangle x\approx 0$:

א. $y=x^4$

פתרון: $D(y)=\mathbb{R}$

נזכיר את נוסחת הבינום:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\quad n\in\mathbb{N},\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\varepsilon(x,\triangle x)=\frac{\triangle y-dy}{\triangle x}=\frac{(x+\triangle x)^4-x^4-4x^3\triangle x}{\triangle x}=6x^2\triangle x+4x\triangle x^2+\triangle x^3\approx 0$$

ב. $y=x-\frac{1}{x}$

פתרון:

$D(y)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\varepsilon(x,\triangle x)=\frac{\triangle y-dy}{\triangle x}=\frac{\left(x+\triangle x-\frac{1}{x+\triangle x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\triangle x}{\triangle x}=\ldots=\frac{-\triangle x}{x^2(x+\triangle x)}\approx 0$$

(עשינו מכנה משותף, כינוס איברים וכו')

כללי גזירה

Table 2.3.1 Rules for Differentiation

(1)	$\frac{d(bx+c)}{dx}=b.$	$d(bx+c)=b\,dx.$
(2)	$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$	$d(u+v)=du+dv.$
(3)	$\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}.$	$d(cu)=c\,du.$
(4)	$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$	$d(uv)=u\,dv+v\,du.$
(5)	$\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$	$d(u^n)=nu^{n-1}\,du$ (n is any integer).
(6)	$\frac{d(u/v)}{dx}=\frac{v\,du/dx-u\,dv/dx}{v^2}.$	$d(u/v)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$

תרגיל 3: גזרו את הפונקציות הבאות :

א. $u=\left(1-4x^3\right)^{-2}$

ב. $v=\left(3x^2+1\right)\left(2x-4\right)^3$

ג. $w=\left(\frac{2}{x-1}-x^{-3}\right)^4$

תרגיל 4: יהיו u ו-v פונקציות של x. מצאו את dy במונחים של du ו-dv :

א. $y=\frac{1}{uv}$

פתרון :

$$dy=-\frac{1}{(uv)^2}d(uv)=-\frac{1}{(uv)^2}\left(vdu+udv\right)=-\frac{1}{u^2v}du-\frac{1}{uv^2}dv$$

ב. $y=\left(u+v\right)\left(2u-v\right)$

פתרון :

$$dy=\left(2u-v\right)\left(du+dv\right)+\left(u+v\right)\left(2du-dv\right)$$
$$=(2u-v+2u+2v)du+(2u-v-u-v)dv=(4u+v)du+(u-2v)dv$$

תרגיל 5: הוכיחו כי אם u,v,w פונקציות דיפרנציאביליות של x ו- $y=uvw$, אזי $\frac{dy}{dx}=uv\frac{dw}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}$.

הוכחה:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(uvw\right)}{dx}=w\frac{d\left(uv\right)}{dx}+uv\frac{dw}{dx}=w\left(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\right)+uv\frac{dw}{dx}=wv\frac{du}{dx}+wu\frac{dv}{dx}+uv\frac{dw}{dx}$$

פונקציות הפיכות והפוכות

הגדרה: שתי פונקציות f ו- g נקראות **פונקציות הפוכות** אחת לשניה אם למשוואות $y=f\left(x\right)$ ו- $x=g\left(y\right)$ יש אותו גרף במישור (x,y).

שימו לב שהגרפים $y=g\left(x\right)$ ו- $x=g\left(y\right)$ שונים בד"כ.

הערה: אם קו אופקי חותך את גרף הפונקציה f ביותר מנקודה אחת, אזי f אינה הפיכה (כי אינה חח"ע).

משפט: (נגזרת של פונקציה הפוכה)

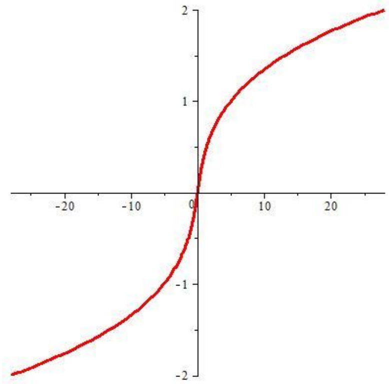
יהיו f ו- g הפוכות אחת לשניה, ז"א ל-$x=g\left(y\right)$ ול-$y=f\left(x\right)$ אותו גרף.

אם שתי הנגזרות $g'\left(y\right)$ ו-$f'\left(x\right)$ קיימות ושונות מאפס, אזי $f'\left(x\right)=\frac{1}{g'\left(y\right)}$, כלומר $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

תרגיל 6: (דוגמא לשימוש במשפט)

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $x=3y^3+2y$ בנקודה $(5,1)$ (הגרף במישור (x,y))

שימו לב: לפי גרף הפונקציה רואים שהיא הפיכה ולכן השימוש במשפט מוצדק.



פתרון: נמצא את שיפוע המשיק $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{9y^2+2}\Big|_{(5,1)}=\frac{1}{11}$ ולכן משוואת המשיק

$$l(x)=\frac{1}{11}(x-5)+1=\frac{1}{11}x+\frac{6}{11}$$

משפט: תהי $y=x^r$, כאשר $r\in\mathbb{Q}$, אזי לכל $x>0$ מתקיים $\frac{dy}{dx}=rx^{r-1}$.

תרגיל 7: מצאו את הפונקציה ההפוכה y ואת הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ כפונקציות מפורשות של x:

א. $x=2y^2+1,\quad y\le 0$

פתרון: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dx}}=\frac{1}{4y}$

מהנתון נובע $y^2=\frac{x-1}{2}$ ומאחר ו- $y\le 0$ נקבל $y=-\sqrt{\frac{x-1}{2}}$.

נציב את הפונקציה המפורשת בנגזרת שמצאנו קודם ונקבל:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-4\sqrt{\frac{x-1}{2}}},\quad x>1$ אפשר לפשט אם רוצים...

ב. $x=\sqrt{y}+2y,\quad y>0$

פתרון: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}+2}$

נמצא את y בצורה מפורשת:

נסמן $\sqrt{y}=p>0$ ונפתור את המשוואה הריבועית $2p^2+p-x=0$ ביחס ל- p

$p=\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{4}>0$

$p=\frac{-1-\sqrt{1+8x}}{4}<0$ לא מתאים

ולכן $y=\left(\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{4}\right)^2$ ו- $\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2\sqrt{1+8x}}=\frac{1}{\frac{2}{-1+\sqrt{1+8x}}+2}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{-1+\sqrt{1+8x}}+2}=\frac{dy}{dx}$

תרגיל 8: הוכיחו, כי $x=ay^2+by+c$ כאשר $a\neq 0$ אינה הפיכה.

הוכחה: נבדוק האם לכל תמונה x יש מקור יחיד y.

נפתור את המשוואה ביחס ל- y ונקבל:

$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-x)}}{2a}$, כלומר קיבלנו שני מקורות שונים אלא אם כן

$b^2-4a(c-x)=0$, כלומר כל קו $x=p$ כך ש- $p\neq\frac{4ac-b^2}{4a}$ חותך את גרף הפונקציה

$x=ay^2+by+c$ בשתי נקודות ולכן הפונקציה אינה הפיכה.