שעת קבלה

23 באוגוסט 2021

1. כידוע $Ax=0 \iff x\in N(A)$. מה התנאי השקול לכך ש־ $x\in C(A),R(A)$?

תשובה: נשים לב:

$$b\in C(A) \iff \exists \alpha_1,\dots,\alpha_n : b=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i(A) \iff$$

$$\iff \exists \alpha_1,\dots,\alpha_n : b=A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

במילים: $b\in C(A)$ אמ"ם למערכת $Ax=b$ יש פתרון.

לגבי מרחב השורות: באופן דומה:

$$b\in R(A) \iff \exists \alpha_1,\dots,\alpha_n : \begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}A=b$$

במילים: $b\in R(A)$ אמ"ם למערכת $xA=b$ יש פתרון (כאשר x,b הם וקטורי שורה).

2. שאלת המשך, ממועד א תשע"ט, שאלה 1 סעיף ג:

תהא

$$A=\begin{pmatrix}1&4&7&-1&2\\2&5&8&2&1\\3&6&9&5&0\end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי a מתקיים $\begin{pmatrix}a^2\\a\\2-a\end{pmatrix}\in C(A)$?

(ב) הוכיחו שקיימים a,b יחידים כך ש־ $\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}\in N(A^t)$.

הם יחידים מכיון שהם מבטאים $aR_1(A)+bR_2(A)=R_3(A)$, ומכיון ששתי

השורות הראשונות בת"ל, אז כל וקטור במרחב השורות, כמו למשל השורה השלישית, ניתן לרשום כצ"ל יחיד של וקטורי הבסיס, הלא הם למשל שתי השורות הראשונות.

(ג) מצאו $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}, C \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ כך ש־ $A = BC$.

פתרון ג:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} \in N(A^t) \iff A^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b & -1 \end{pmatrix} A = 0 \iff$$

$$\iff aR_1(A)+bR_2(A)-R_3(A) = 0 \iff aR_1(A)+bR_2(A) = R_3(A)$$

ואז נקבל שעבור

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ R_2(A) \end{pmatrix}$$

ואז נקבל:

$$R_1(BC) = R_1(B)\cdot C = 1\cdot R_1(C) + 0\cdot R_2(C) = R_1(C) = R_1(A)$$

$$R_2(BC) = 0\cdot R_1(C) + 1\cdot R_2(C) = R_2(A)$$

$$R_3(BC) = R_3(B)\cdot C = a\cdot R_1(C) + b\cdot R_2(C) = R_3(A)$$

ולכן:

$$BC = A$$

3. נתונות העתקות $T,S : V \to V$ כך ש־ $TS = 0$. האם בהכרח $T = 0$ או $S = 0$?
לא. בדומה לזה, אמרנו במטריצות שמתקיים $C(B) \subseteq N(A) \iff AB = 0$.
אצלנו מתקיים:

$$TS = 0 \iff Im(S) \subseteq \ker T$$

מכאן יהיה קל למצוא דוגמא נגדית, פשוט לוקחים S לא הפיכה ושונה מאפס, ונגדיר T לפי משפט ההגדרה: לוקחים בסיס ל $Im(S)$ ואותו שולחים ע"י T לאפס, ואת ההשלמה לבסיס שולחים לאן שרוצים ששונה מאפס (ע"י T) כדי ש־T לא תהיה

העתקת האפס.

למשל אם $V = span\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. אז נוכל להגדיר:

$$S(v_1) = v_1, S(v_2) = v_1$$

ואז נגדיר את T ע"י:

$$T(v_1) = 0, T(v_2) = v_2$$

4. כידוע לפי משפט ההגדרה, בהינתן מ"ו V, W, וכן בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ של V ווקטורים $w_1, \ldots, w_n \in W$, ישנה העתקה יחידה המקיימת:

$$\forall i : Tv_i = w_i$$

האם $\{w_1, \ldots, w_n\}$ בסיס של W?

ראשית, לא! מה כן אפשר לומר:

$$Im(T) = span\{w_1, \ldots, w_n\}$$

5. בהינתן העתקות $T, S : V \to V$ המקיימות $TST = I$. הוכיחו ש־ T הפיכה ומצאו את ההופכית שלה. האם S הפיכה?

פתרון: אפשר לעבור למטריצות מייצגות: לכל בסיס B של V מתקיים:

$$[T]_B^B[S]_B^B[T]_B^B = [TST]_B^B = [I]_B^B = I$$

ואז נקבל שמכפלת המטריצות $[T]_B^B[S]_B^B[T]_B^B$ היא הפיכה ולכן כל אחת מהמוכפלות הפיכה. אם יש מטריצה הפיכה שמייצגת את T אז T העתקה הפיכה (באופן כללי, T העתקה הפיכה אמ"ם לכל בסיסים B, C המטריצה $[T]_C^B$ הפיכה אמ"ם קיימים בסיסים B, C כך שהמטריצה $[T]_C^B$ הפיכה). על הדרך הוכחנו ש־S הפיכה גם.

לגבי מצאו את ההופכית: ראשית ההופכית היא $TS = ST$.

פתרון נוסף: מכיון שהעתקת הזהות הפיכה היא חח"ע ועל, ואז נקבל שההרכבה TST חח"ע, ולכן הימנית, T, חח"ע. בדומה, נקבל שההעתקה TST על ולכן השמאלית, T, היא על, ובסה"כ T חח"ע ועל ולכן הפיכה. כעת נקבל:

$$S = T^{-1}IT^{-1} = T^{-2}$$

ונקבל S הפיכה כהרכבת הפיכות. בנוסף:

$$TS = ST = T^{-1}$$

6. בהינתן מרחבים וקטורים $V \subseteq W$ ובסיסים B_V, C_W.

(א) לא ניתן לומר $B_V \subseteq C_W$. לדוגמא: $V = span\{e_1, e_2\} \subseteq W = \mathbb{R}^3$. נוכל לקחת בסיסים $B = \{e_1, e_2\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ואין הכלה.

(ב) מה שכן אפשר לומר: לכל בסיס B של V ניתן להשלים אותו לבסיס של W, ואז כמובן נקבל שההשלמה מכילה את B.

(ג) לא ניתן לומר: בהינתן בסיס C של W קיימת תת קבוצה $C \subseteq B$ המהווה בסיס של V. הדוגמא של א למשל.

7. בהינתן $W = span\{v_1, \ldots, v_k\}$ כיצד מוצאים מטריצה A כך ש- $W = N(A)$?
נעבור לוקטורי קואורדינטת כדי לעבוד ב- $\mathbb{R}^n$, ואז: וקטור כללי $v \in W$ אמ"ם הוא שייך למרחב העמודות של

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$$

ולכן השאלה היא עבור אילו ערכי v יש פתרון למערכת

$$Bx = v$$

,ואז מדרגים את:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & \cdots & v_k & v \end{array} \right)$$

ומקבלים מערכת משוואות לינארית הומוגנית שנסמן את הטרציה שלה ב- A שמרחב האפס שלה הוא בדיוק W.

8. בהינתן בסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

וידוע:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

מצאו את $[A]_B$. מוצאים את הפתרון של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

הפתרון $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ הוא בעצם וקטור הקואורדינטות:

$$[A]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

9. נתונה המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא בסיס ל $C(A) \cap N(A)$ נעביר את מרחב העמודות לצורה של מרחב אפס כלשהו:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ -2 & 4 & -2 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3 & 2 & a-2b \\ 0 & 3 & -2 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3 & 2 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right)$$

ולכן נקבל:

$$C(A) = N\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$C(A) \cap N(A) = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ומוצאים את מרחב האפס.