1.8.2021

## בסיס וחברים

1. יהא $V$ מ"ו. יהיו $W_1 \subseteq W_2$ תתי מרחבים. הוכיחו/הפריכו: כל בסיס של $W_2$ ניתן לצמצום לבסיס של $W_1$. (בכל בסיס $B$ של $W_2$ ניתן למצוא $B' \subseteq B$ כך ש $B'$ הוא בסיס של $W_1$).

פתרון: הפרכה $V = \mathbb{R}^2$ ו

$$W_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$W_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

אזי מתקיים כי $W_2 = \mathbb{R}^2$ כי $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל (הם לא כפולה אחד של האחר) והם $2 = \dim \mathbb{R}^2$ ולכן לפי השלישי חינם הם בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן $W_1 \subseteq W_2$. בנוסף

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הוא בסיס של $W_2$ ולא ניתן לצמצמו לבסיס של $W_1$ שהרי $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \emptyset$ הם כל תתי הקבוצות של $B_2$ ואף אחד מהם לא פורש את $W_1$.

2. יהא $V$ מ"ו. יהיו $W_1 \subseteq W_2$ תתי מרחבים. הוכיחו/הפריכו: קיים בסיס של $W_2$ שניתן לצמצום לבסיס של $W_1$.

פתרון: משפט שראיתם בהרצאה (אני מקווה) כל בסיס של $W_1$ ניתן להרחיב לבסיס של $W_2$. בנוסף, ל $W_1$ קיים בסיס שנסמנו $B_1$ ולפי המשפט ניתן להרחיבו ל $B_2$ שהוא יהיה בסיס ל $W_2$ (כלומר $B_1 \subseteq B_2$ והוא בסיס של $W_2$). לכן: $B_2$ הוא בסיס ל $W_2$ וניתן לצמצמו לבסיס של $W_1$ (הצמצום = $B_1$).

## מרחבי מטריצה

1. מצאו בסיסים ל $C(A), R(A), N(A)$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

פתרון: נדרג את $A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז:

- $N(A)$: מרחב האפס של $A$ זה פשוט קבוצת הפתרונות (המוכרת לנו) של המערכת ההומגנית $Ax = 0$. דירגנו את $A$ ולכן קל לראות ש

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -3t-2s \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $N(A)$.

- $R(A)$: מרחב השורות (+משפט: מרחב השורות לא מתקלקל בדירוג):

$$R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (שורות שונות מאפס לאחר דירוג) זה בסיס ל $R(A)$.

- $C(A)$: מרחב העמודות (משפט: הוא כן עלול להתקלקל בדירוג אבל מה שנשמר זה המיקום של עמודות בת"ל).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בצורה מדורגת, העמודות שהן בת"ל (המספר המקס' של כאלה) הן עמודות שיש בהם איבר מוביל. אצלנו זה עמודה 1

ועמודה 2 ולכן עמודה 1 ועמודה 2 במטריצה $A$ (המקורית!) יהוו בסיס ל $C(A)$. כלומר, אצלנו,

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

הוא בסיס ל $C(A)$. שימו להדגמה של משפט הדרגה (לכל $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים כי $\dim N(A)+\text{rank}A=n$): אצלנו,

$$\dim N(A)+\text{rank}A=2+2=4$$

ולכך ש

$$\dim C(A)=2=\dim R(A)$$

(א) מצאו בסיס ל $W=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: $W$ הוא פשוט $C(A)$ של השאלה. ול $C(A)$ מצאנו בסיס (האמת, שזה דרך לצמצם קבוצה פורשת לבסיס). כלומר

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$$

היא פורשת את $W$. ואם נשים את הוקטורים כעמודות מטריצה ($A$ שלנו) ונמצא בסיס ל $C(A)$ כמו שעשינו, אנחנו בעצם מצמצם לבסיס. מה שגילנו זה ש

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $C(A)$ ששוה ל $W$.

הערה: באופן דומה יכלנו להגדיר $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\3&0&3\\4&1&5\end{pmatrix}$ ואז מתקיים ש $R(M)=W$ . ואנחנו יודעים איך למצוא בסיס למרחב שורות של מטריצה (פה, לא בהכרח שנקבל צמצום לבסיס. אנחנו ניקח שורות שונות מאפס בצורה מדורגת של $M$).

2. השלימו את קבוצת הוקטורים (נתון שהם בת"ל) הבאה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

לבסיס של $\mathbb{C}^4$.פתרון: נשים את $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$ בעמודות מטריצה ונוסיף עוד עמודות שהם בסיס ל $\mathbb{C}^4$ ונדרג:

$$\left( \begin{array}{cc|cccc} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \cdots \to \left( \begin{array}{cc|cccc} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}+\frac{i4}{3} & -\frac{1}{6}(1-i) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10}(1-i) \end{array} \right)$$

ונקבל ש בעמודות $1$ עד $4$ יש איברים מובילים במטריצה מדורגת ולכן עמודות $1$ עד $4$ במטריצה המקורית הם בת"ל (הם בסיס למרחב העמודות שלה). כלומר

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בת"ל. כיוון שיש פה $4$ וקטורים בת"ל (ו $\dim \mathbb{C}^4 = 4$) נקבל לפי השלישי חינם שזהו בסיס ל $\mathbb{C}^4$.

3. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ ו $C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ . הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל $A$ מתקיים $\text{rank}A = \text{rank}B$.

פתרון: הוכחה: נבצע את הפעולות $R_{n+1} - R_1, \ldots, R_{n+n} - R_n$ על המטריצה $B$ ונקבל

$$B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\text{rank}B = \text{rank}\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}A$$

כי מספר עמודות בת"ל מקסימאלי ב $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ שווה למספר עמודות בת"ל מקסימאלי ב $A$.

(ב) לכל $A$ מתקיים $\text{rank}A = \text{rank}C$.

פתרון: הפרכה $n = 2$ ו

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$C = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

ומתקיים $\text{rank}A = 1$ ואילו $\text{rank}C = 2$.

(ג) קיימת $A$ שעבור $\text{rank}C = 2\text{rank}A$ .

פתרון: הוכחה - הדוגמה מסעיף קודם.

(ד) קיימת $A$ שעבור $\text{rank}C > 2\text{rank}A$ (להזכירכם: $C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix}$).

פתרון: הפרכה. נוכיח שלכל $A$ מתקיים $\text{rank}C \leq 2\text{rank}A$. הוכחה: להזכירכם $\text{rank}A = \text{rank}A^t$. ולכן המספר המקס' של שורות בת"ל ב $A$ הוא $\text{rank}A$. המספר המקס' של שורות בת"ל ב $A^t$ הוא $\text{rank}A$. ולכן המספר המקס' של שורות בת"ל ב $C$ הוא לכל היותר $\text{rank}A + \text{rank}A$ (השורות הבת"ל מהחלק של $A$ + השורות הבת"ל מהחלק של $A^t$). במילים אחרות, ע"י פעולות דירוג ניתן להגיע ל $n - \text{rank}A$ שורות אפסים בחצי העליון ו $n - \text{rank}A$ שורות אפסים בחצי התחתון.

(ה) קיימת $A$ שעבור $\text{rank}C < 2\text{rank}A$.

פתרון: הוכחה, למשל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$C = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

ומתקיים $\text{rank}C = 1 = \text{rank}A$.

4. עבור $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימת $A^2 = 0$ הוכיחו כי $\text{rank}A \leq \frac{n}{2}$ (ב XI)

5. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימות $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) > n$. הוכיחו כי $AB \neq 0$.

פתרון: נב"ש ש $AB = 0$ בפרט לכל עמודה $j$ מתקיים

$$0 = C_j(AB) = A \cdot C_j(B)$$

ולכן קיבלנו, שכל עמודה של $B$ שייכת ל

$$N(A) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid Av = 0\}$$

(כי $A$ כפול עמודה של $B$ שווה 0). לכן $C(B)\subseteq N(A)$ (אם כל עמודה של $B$ שייך לאיזה שהוא ת"מ $W$ אזי $C(B)\subseteq W$) ולכן

$$\dim C(B)\leq \dim N(A)$$

ולכן (אם נחבר $\mathrm{rank}A$ לשני האגפים)

$$n<\mathrm{rank}A+\dim C(B)\leq \dim N(A)+\mathrm{rank}A=n$$

השיווין האדום זה משפט הדרגה, השיווין הירוק הוא הנתון. קיבלו סתירה $n<n$.

6. תהא

$$A=\begin{pmatrix}1&1&*\\1&*&1\\ *&*&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

(כוכביות = כל דבר אפשרי, הכוכביות לא בהכרח שוות). נתון שקיימים 2 פתרונות בת"ל למערכת $Ax=0$. מצאו את $A$.
פתרון: לפי הנתון נסיק כי $\dim N(A)\geq 2$ מכאן, לפי משפט הדרגה

$$\dim N(A)+\mathrm{rank}A=3$$

ולכן

$$\mathrm{rank}A=3-\dim N(A)\leq 3-2=1$$

מצד שני $\mathrm{rank}A\geq 1$ (כי $\mathrm{rank}A=0$ שקול לכך ש $A=0$ וזה לא המקרה). לכן $\mathrm{rank}A=1$. כיוון שהעמודה הראשונה אינה אפסים היא בסיס למרחב העמודות (משפט השלישי חינם) ולכן העמודה השניה והשלישית ת"ל בעמודה הראשונה (כלומר כפולה של העמודה הראשונה). לכן נקבל שעמודה השניה היא כפולה ב 1 של העמודה הראשונה (למה כפולה ב 1? לפי האיברים ב $1,1$ ו $1,2$) במילים אחרות,

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\ *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ *\\ *\end{pmatrix}$$

גורר ש $\alpha=1$. ובחישובים דומים נקבל בסופו של דבר

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

7. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ הוכיחו כי

(א) $\mathrm{rank}(A+B)\leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

פתרון: טענת עזר $C(A+B)\subseteq C(A)+C(B)$ הוכחת עזר: (איך נראה איבר במרחב עמודות של מטריצה $M$? צ"ל

של עמודות $M$ שניתן לכתוב כ $Mv$ עבור $v$ כלשהוא. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

שזהו צ"ל של עמודות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$). יהא $v\,(A+B)$ במרחב העמודות של $A+B$. לפי פילוג, לכל $v$ מתקיים

$$(A+B)\,v = Av + Bv \in C(A) + C(B)$$

וסיימנו. לכן

$$\begin{aligned}\text{rank}(A+B) = \dim C(A+B) &\le \dim\left[C(A)+C(B)\right] \\ &= \dim C(A) + \dim C(B) - \dim C(A)\cap C(B) \\ &\le \dim C(A) + \dim C(B) \\ &= \text{rank}(A) + \text{rank}(B)\end{aligned}$$

כאשר השיויון באדום הוא משפט המימדים ( $\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$) וסיימנו.

(ב) $\text{rank}(A-B) \ge \text{rank}(A) - \text{rank}(B)$.

פתרון: נשתמש בסעיף א. ונקבל ש

$$\text{rank}(A-B) + \text{rank}B \ge \text{rank}\left((A-B)+B\right) = \text{rank}A$$

ולכן בהעברת אכף נקבל

$$\text{rank}(A-B) \ge \text{rank}(A) - \text{rank}(B)$$

כנדרש.

8. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה שדרגתה $\text{rank}A = r$. הוכיחו כי קיימת תת-מטריצה מגודל $r \times r$ הפיכה.