לינארית להנדסה- פתרון בוחן

1.5.2019

- מרצה: מיטל רובינסון, מתרגל: עוזי חרוש
- ענו על כל השאלות. יש לנמק כל תשובה!!
- רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא על הכריכה
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור

תרגיל 1. בתרגול (באוניברסיטה לא מוכרת) על נושא הפיכת מטריצות, המתרגל גילה שהוא שכח את הדף הראשון של התרגיל שבו נתונה המטריצה המקורית (A) שצריך להפוך, אך למזלו זכר ששלושת הפעולות שנדרשו להגיע למטריצה הנתונה

$$B=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

המופיעה בעמוד השני הן היו (לפי הסדר הנתון)

$$\begin{array}{ll}\rho_1: & R_1\leftrightarrow R_2\\ \rho_2: & \frac{1}{2}R_2\\ \rho_3: & R_3-R_2\end{array}$$

1. [15 נק] האם תוכל לעזור למתרגל לשחזר את המטריצה המקורית (A)?
2. [15 נק] לצערו גם המשך הדירוג של המטריצה B לא היה בהישג ידו(החתול אכל לו את הדף), האם תוכל לעזור למתרגל המבולבל למצוא את A^{-1}?

פתרון.

(א) על פי מה שלמדנו

$$B=\rho_1\left(I\right)\rho_2\left(I\right)\rho_3\left(I\right)A$$

לכן

$$A=\rho_3^{-1}\left(I\right)\rho_2^{-1}\left(I\right)\rho_1^{-1}\left(I\right)B$$

כלומר צריך להכפיל במטריצות האלמנטיות של הפעולות ההפוכות

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

(ב) נרשום את המטריצה ולצידה את מטריצת היחידה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \left[E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \left[E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3 \to R_3} \left[E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_3 \to R_1} \left[E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left[E_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

אז ההופכית של A היא $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

תרגיל 2. נגדיר $W_1 = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | A = A^t\right\}$ ו-$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + d = 0 \right\}$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$

1. [10 נק] מצאו בסיס ל-$W_1 \cap W_2$
2. [10 נק] האם קיימים תתי מרחבים U_1, U_2 כך ש-$\{0\} \subset U_1 \subset U_2 \subset W_1 \cap W_2$? נמק, ובמידה וקיימים מצא אותם
3. [10 נק] אם קיימים תתי מרחבים U_1, U_2 כך ש-$\{0\} \subset U_1 \subset U_2 \subset W_1$? נמק, ובמידה וקיימים מצא אותם

פתרון.

(א) ראשית נביע את במרחבים בעזרת משוואות

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | A = A^t\right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| b = c \right\} \end{aligned}$$

כעת כמו שלמדנו החיתוך מתקבל על ידי צירוף המשוואות כלומר

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{Bmatrix} b = c \\ a + d = 0 \end{Bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(ב) נניח בשלילה שקיימים תתי מרחבים כאלו

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset W_1 \cap W_2$$

לכן

$$0 < dim\left(V_1\right) < dim\left(V_2\right) < 2$$

אך הדבר לא יתכן היות ו-$dim\left(V_i\right)$ הוא מספר שלם.

(ג) הדבר אפשרי ראשית נמצא בסיס ל-W_1

$$W_1 = \left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \middle| b=c\right\} =$$

$$= \left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & d \end{array}\right) \middle| b=c\right\} = Span\left\{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right\}$$

לכן ניקח

$$V_1 = Span\left\{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right\}$$
$$V_2 = Span\left\{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\right\}$$

ואז

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset W_1$$

תרגיל 3. ענו על 4 מתוך הסעיפים הבאים. הוכח\הפרך :

1. [10 נק] אם $A^2 = 0$ אז $A = 0$

פתרון.

לא נכון, ניקח $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ אך $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. [10 נק] אם $A^2 = I$ אז $A = I$

פתרון.

לא נכון, ניקח $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ אך $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. [10 נק] אם $\{v_1, v_2, v_3\}$ ווקטורים בת"ל אז $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$ בת"ל.

פתרון.

לא נכון, הצירוף

$$-1\left(v_1 + v_2\right) + \left(v_2 + v_3\right) + \left(v_2 - v_3\right)$$

מתאפס לכל v_1, v_2, v_3בפרט לווקטורים בת"ל

4. [10 נק] למערכת בעלת שלושה נעלמים ושתי משוואות יש בהכרח אינסוף פתרונות?

פתרון.

לא נכון, ניקח

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

5. [10 נק] למערכת מהצורה $Ax = b$ כאשר A ריבועית ישנו פתרון יחיד אם ורק אם A הפיכה.

פתרון.

נכון,
$\Leftarrow$ אם יש פתרון יחיד אז הצורה הקנונית של A היא מטריצת היחידה ולכן A הפיכה.
$\Rightarrow$ אם Aהפיכה אז נכפיל ב-A^{-1} ונקבל $x = A^{-1}b$ שזה הפתרון היחיד.

בהצלחה♡