תרגיל בית 4 אלגברה מופשטת 2

1. יהי $\varphi\colon R\to S$ הומומורפיזם (עם יחידה). הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

   (א) אם $I\lhd R$ אידיאל אז $\varphi\left(I\right)\lhd S$ אידיאל.

   (ב) אם $I\lhd S$ אידיאל אז $\varphi^{-1}\left(I\right)\lhd R$ אידיאל.

   (ג) אם $I\lhd R$ אידיאל וφ אפימורפיזם, אז $\varphi\left(I\right)\lhd S$ אידיאל.

   (ד) אם $I\lhd S$ אידיאל וφ אפימורפיזם, אז $\varphi^{-1}\left(I\right)\lhd R$ אידיאל.

2. עבור חוג R ואידיאל $I\lhd R$ הוכיחו כי: $M_n\left(R\right)/M_n\left(I\right)\cong M_n\left(R/I\right)$.

3. הוכיחו $\mathbb{C}\left[x,y\right]/\left\langle x^2+y^2-1\right\rangle\cong\mathbb{C}\left[x,y\right]/\left\langle xy-1\right\rangle$.

4. יהי R חוג מקומי, ויהי $f\colon R\to S$ אפימורפיזם. הוכיחו כי S הוא חוג מקומי.

5. הוכיחו כי החוגים $R=\mathbb{F}_p[x]/\left\langle x^2\right\rangle$ ו $S=\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ הם חוגים מקומיים (כאשר $\mathbb{F}_p$ הוא השדה היחיד מעצמה p).
   הראו שעצמת החוגים שווה, ועצמת האידיאלים המקסימליים שלהם שווה, וכן שני האידיאלים המקימליים נוצרים ע"י איבר שריבועו הוא 0- ובכל זאת הם לא איזומורפיים.

6. ראיתם בהרצאה, עבור קבוצה X , את החוג $(P(X),\nabla,\cap)$ - זהו חוג בוליאני (= חוג שבו כל האיברים הם אידמפוטנטיים). בתרגיל זה נוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מהצורה $(P(X),\nabla,\cap)$ עבור איזושהי קבוצה X.

   (א) הזכרו שראינו בתרגיל קודם שכל חוג בוליאני הוא קומוטטיבי ומקיים $a+a=0$ לכל $a\in A$.

   (ב) הוכיחו כי השדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{Z}_2$.

   (ג) יהי A חוג בוליאני ויהי $a\in A$. הוכיחו כי כל אידיאל מקסימלי של I מכיל את a או את $1-a$ ואף פעם לא את שניהם. הסיקו כי קיים אידיאל מקסימלי שלא מכיל את a.

(ד) הוכיחו כי המנה A/M איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2$ לכל אידיאל מקסימלי אמיתי M.

(ה) יהי $A \ni a \neq 0$. הוכיחו כי קיים אידיאל מקסימלי M שלא מכיל את a.

(ו) תהא X הקבוצה של כל האידיאלים המקסימליים. הוכיחו כי ההעתקה

$$A \longrightarrow P(X)$$

השולחת כל איבר לקבוצת כל האידיאלים המקסימליים שלא מכילים אותו, היא שיכון של חוגים.