תרגיל 5

16 בנובמבר 2015

1. עבור קבוצות A, B, C, D הוכח או הפריך את הטענות הבאות:
א. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
ב.$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
ג. $(A \cap B) \times (C \cap D) \supsetneq (A \times C) \cap (B \times D)$ (הסימון מכיל ולא שוה)
ד. $(A \cap B) \times (C \cap D) \subsetneq (A \times C) \cap (B \times D)$
פתרון:

א. הוכחה:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & \in & A \times (B \cup C) \\ & \Updownarrow & \\ a \in A & \wedge & b \in B \cup C \\ & \Updownarrow & \\ a \in A & \wedge & (b \in B \vee b \in C) \\ & \Updownarrow & [Distributive - property] \\ (a \in A \wedge b \in B) & \vee & (a \in A \wedge b \in C) \\ & \Updownarrow & \\ (a,b) \in A \times B & \vee & (a,b) \in A \times C \\ & \Updownarrow & \\ (a,b) & \in & (A \times B) \cup (A \times C) \end{array}$$

ב. הוכחה:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & \in & A \times (B \backslash C) \\ & \Updownarrow & \\ a \in A & \wedge & b \in B \backslash C \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
& \Updownarrow & \\
a \in A & \wedge & (b \in B \wedge b \notin C) \\
& \Updownarrow & \\
(a \in A \wedge b \in B) & \wedge & (b \notin C) \\
& \Updownarrow & \\
(a,b) \in A \times B & \wedge & (a,b) \notin A \times C \\
& \Updownarrow & \\
(a,b) & \in & (A \times B) \setminus (A \times C)
\end{array}
$$

ג. הפרכה: דוגמה נגדית $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{2\}, D = \{1\}$:

$$
\begin{array}{rcl}
(A \cap B) \times (C \cap D) & = & \phi \times \phi \\
(A \times C) \cap (B \times D) & = & (1,2)
\end{array}
$$

ד. הפרכה: $A = B = C = D = \phi$ כמובן ששני הצדדים שוים לקבוצה הריקה.

2. תהי X קבוצת בנייני האוניברסיטה, ונגדיר יחס "סמיכות" $R \subseteq X \times X$ ע"י: $(a,b) \in R$ אם ורק אם המרחק בין הבניין a והבניין b קטן או שווה למאה מטרים. האם R הוא בהכרח מקיים את התכונות הבאות? (כלומר, אל תלכו לבדוק מרחקים)

א. רפלקסיבי

ב. אנטי רפלקסיבי

ג. סימטרי

ד. אנטי סימטרי

ה. טרנזיטיבי

פתרון:

א. כן. המרחק בין בנין לעצמו הוא 0. כלומר, הבניין סמוך לעצמו.

ב. לא.

ג. כן, למרחק לא משנה מי משמאל ומי מימין.

ד. לא, יכולים להיות שני בניינים סמוכים שונים.

ה. לא, יכולים להיות שלושה בניינים בשורה שהמרחק בין הראשון לשני הוא 75 מטר וכנ"ל בין השלישי לשני, ואז בין הראשון לשלישי יש 150 מטר ולכן הם לא סמוכים.

3. תהי $\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים. קבעו לגבי כל יחס מעל $\mathbb{N}$ (תת קבוצה של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) האם הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

א. $R_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a \leq b\}$

ג. $R_3 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a = b\}$

פתרון:

R_1- אנטי רפלקסיבי , אנטי סימטרי , טרנזטיבי.

R_2- רפלקסיבי , אנטי סימטרי , טרנזטיבי.

R_3- רפלקסיבי , סימטרי , אנטי סימטרי , טרנזטיבי.

4. תהי A קבוצה, ו- $A_1, A_2, ..., A_n$ אוסף של תתי קבוצות שלה (כלומר, $\forall 1 \leq i \leq n$: $A_i \subseteq A$). נגדיר על A יחס $R \subseteq A \times A$ ע"י:

$$R = \{(x,y) \in A \times A | \exists i \text{ such that } x \in A_i \wedge y \in A_i\}$$

(הסבר במילים, הזוג הסדור (x,y) נמצא ביחס R אם ורק אם קיימת קבוצה A_i מבין הקבוצות שהגדרנו כך ש- $x \in A_i$ גם $y \in A_i$)

הוכח או הפרך:

א. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ $\Leftarrow$ R רפלקסיבי.

ב. R רפלקסיבי$\Leftarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

ג. לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \phi$ $\Leftarrow$ R טרנזיטיבי.

ד. R טרנזיטיבי $\Leftarrow$ לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \phi$.

פתרון:

א. הוכחה: יהי $a \in A$, צריך להראות ש- $(a,a) \in R$. מהנתון ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ נובע שקיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a \in A_i$, ולכן (a,a) מקיים את התנאי של היחס ולכן $(a,a) \in R$.

ב. הוכחה: נניח ש- R רפלקסיבי, מספיק להוכיח ש- $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, כי ההכלה בצד השני טריוויאלית, כי כולם תתי קבוצות של A. לכן יהי $a \in A$, כיון ש- R רפלקסיבי נובע ש- $(a,a) \in R$, ולכן קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a \in A_i$, ולכן הוא גם באיחוד.

ג. הוכחה: יהיו $a,b,c \in A$ כך ש- $(a,b) \in R \ \wedge (b,c) \in R$, אזי נובע שקיים i כך ש- $a \in A_i \wedge b \in A_i$, וקיים j כך ש- $b \in A_j \wedge c \in A_j$. כעת, אם $i \neq j$, אז נובע ש- $b \in A_i \cap A_j$, בסתירה לנתון. לכן $i = j$, ולכן גם $c \in A_i$, ולכן $(a,c) \in R$.

ד. הפרכה: ניקח את $A = \{1,2,3,4\}$, ואת תתי הקבוצות: $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{3\}, A_3 = \{4\}$, אזי R טרנזיטיבי אבל $A_1 \cap A_2 = \{3\} \neq \phi$.