<u>אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 9</u>

1. כדאי להמחיש את הפונקציה ע"י טבלה

$\cdots$	n	3	2	1	m\n
		0	0	$2-2^{-1}$	1
		0	$2-2^{-2}$	$-2+2^{-2}$	2
		$2-2^{-3}$	$-2+2^{-3}$	0	3
	$f(m,n)$				m
$\ddots$					$\vdots$

א. מלבן מדיד הוא כל קבוצה מהצורה $E\times F$ כאשר $E,F\subseteq\mathbb{N}$. בעצם מלבן מדיד הוא תת-קבוצה כלשהי של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

ב. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ $\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\ f(m,n)<\alpha\}$ היא תת קבוצה של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ולכן היא מלבן מדיד, ולכן מדידה.

ג. יש להוכיח כי $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)\neq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n)$ (הסיבה שהאינטגרלים הופכים לטורים הוכחה בתרגילים קודמים). ניתן לחשב, ולקבל $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)=\frac{3}{2},\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n)=-\frac{1}{2}$

ד. אין סתירה עם משפט טונלי כי הפונקציה אינה אי-שלילית (למשל $f(2,1)<0$) וגם אין סתירה עם משפט טונלי כי f אינה אינטגרבילית. הוכחה :

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\left|f(m,n)\right|d(\#\times\#)\geq\int_{\{(m,n):m=n\}}\left|f(m,n)\right|d(\#\times\#)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(n,n)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-2^{-n}\right)=\infty$$

2.

ג. E מדידה ולכן I_E מדידה. ע"פ משפט טונלי נסיק

$\int_{X\times Y} I_E(x,y)\,dw=\int_X\left[\int_Y I_E(x,y)\,dv(y)\right]du(x)$. אגף שמאל הוא בדיוק $w(E)=0$, ולכן $\int_X\left[\int_Y I_E(x,y)\,dv(y)\right]du(x)=0$. לכל $x\in X$ קבוע $\int_Y I_E(x,y)\,dv(y)=v(E_x)\geq 0$ כך שבסך הכל $\int_X v(E_x)\,du(x)=0$ ובגלל שהאינטגרנד אי-שלילי נקבל כי $v(E_x)=0$ כב"מ $du(x)$.

תרגיל 3 יהי X אוסף כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. ברור כי X הוא מרחב וקטורי[1]. לכל פולינום $p\in X$ נגדיר את $\|p\|$ להיות סכום הערכים המוחלטים של המקדמים של p.

האם $\|\cdot\|$ היא נורמה על X? ואם לא, אילו מאקסיומות הנורמה היא מקיימת?

הוכחה. $\|\cdot\|$ היא אכן נורמה על X. נוכיח זאת ע"י הוכחת שלושת התנאים לנורמה.

1. קל לראות כי $\|p\|\geq 0$ לכל פולינום $p\in X$, שכן הנורמה הוגדרה כסכום של ערכים חיוביים. אם $p\equiv 0$ אז ברור כי $\|p\|=0$. לצד השני, אם $\|p\|=0$, אז סכום הערכים המוחלטים של המקדמים של p הוא 0, ולכן בהכרח כל אחד מן המקדמים הללו שווה 0 ולכן בהכרח $p\equiv 0$.

2. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ו־$p\in X$. אזי, נניח כי $p=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. מתקיים:

$$\|\alpha p\|=\|\alpha a_0+\alpha a_1x+\cdots+\alpha a_nx^n\|=\sum_{i=0}^{n}|\alpha a_i|=|\alpha|\sum_{i=0}^{n}|a_i|=|\alpha|\cdot\|p\|$$

3. נניח $p,q\in X$. נסמן $n=\max\{\deg(p),\deg(g)\}$, ונסמן

$$\begin{aligned}p&=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\\ q&=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n\end{aligned}$$

כאשר המקדמים שלא היו מוגדרים קודם מוגדרים כעת ל־0. כעת, מתקיים

$$\|p+q\|=\|(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n\|=\sum_{i=0}^{n}|a_i+b_i|\leq$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}|a_i|+|b_i|=\sum_{i=0}^{n}|a_i|+\sum_{i=0}^{n}|b_i|=\|p\|+\|q\|$$

כאשר אי־השיוויון השלישי נובע מאי־שיוויון המשולש בממשיים.

ולכן סה"כ הוכחנו את כל התנאים לנורמה, ולכן $\|\cdot\|$ נורמה על X. ■

תרגיל 4 יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב בנך[2], ויהי $Y\subseteq X$ תת־מרחב סגור. הוכיחו כי $(Y,\|\cdot\|)$ הוא מרחב בנך.

הוכחה. נשים לב כי $(Y,\|\cdot\|)$ עדיין מהווה מרחב נורמי שכן Y תת־מרחב וקטורי של X וניתן לצמצם את $\|\cdot\|$ ל־Y והיא תשמור על תכונות הנורמה. ולכן, נותר להוכיח ש־$(Y,\|\cdot\|)$ מרחב שלם. לשם כך, תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי ב־Y. לפי ההנחה, X מרחב בנך ולכן שלם ולכן קיים $x\in X$ כך ש־$x_n\to x$. לפי הנתון, Y סגורה ולכן סגורה להתכנסות, כלומר, $x\in Y$. מכיוון שמדובר באותה המטריקה ב־Y כשם שב־X, נקבל שב־Y הסדרה x_n מקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$$

ולכן היא גם מתכנסת ב־Y ל־x, ולכן כל סדרת קושי מתכנסת ולכן $(Y,\|\cdot\|)$ שלם, ולכן סה"כ מרחב בנך. ■

---

[1] אין צורך להוכיח זאת.

[2] מרחב נורמי שלם.