תרגול 2-אושרית

דירוג גאוס, מספר פתרונות של מערכת משוואות ואלגברת מטריצות

18) קיום הפתרונות של מערכת:

הגד: **משתנה תלוי** - משתנה, שבעמודה המדורגת של המטריצה יש איבר מוביל בעמודה שלו.
משתנה חופשי - משתנה שאינו תלוי.

1) **אין פתרון** - אם קבלנו במדורגת יש שורת סתירה
2) **פתרון יחיד** - אין שורת סתירה במדורגת + אין משתנים חופשיים
3) **אינסוף פתרונות** - אין שורת סתירה במדורגת + משתנים חופשיים + ∞ מס׳ בשדה
(אלגברי - תמיד יש ∞ מס׳ בשדה כי לא מתעסקים בשדות סופיים)

דוג:

$$\begin{array}{ccc|c} \text{תלוי} & \text{חופשי} & \text{תלוי} & \\ x & y & z & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ב-● איברים מובילים

דוגמאות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

אין פתרון

*- מס׳ כלשהם
c- מס׳ שונה מ-0

$$\left(\begin{array}{ccc} * & & \\ & * & \\ & & * \end{array}\right)$$

בכל העמודה איבר מוביל - פתרון יחיד.

פתרון יחיד

הגד: צורה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת + אפסים מעל כל איבר מוביל + איברים מובילים שווים ל-1

תרגיל: הפכו את A למדורגת קנונית

פתרון:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל: דרגו + דרגו קנונית את המטריצה הבאה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3+R_2} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{מדורגת}} \xrightarrow{R_1=R_1-3R_2}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{קנונית}}$$

$\boxed{\text{אין פתרון}}$

תרגיל: פתרו מערכת המשוואות מעל R.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(נשתמש בדירוג אשלון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

מדורגת

(נמשיך לדירוג קנוני

$$\xrightarrow{R_2 = \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \end{array}}$$

פתרון יחיד

תרגיל:

פתרו את המערכת המתאימה מעל $\mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{2}R_1} \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

לפי צורה הסופית. ניתן לראות כי יש ∞ פתרונות

Z=1

$$x + 2y = \frac{1}{2}$$

נסמן $y = t$ ונקבל -

$$x + 2t = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} - 2t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

תרגיל בית:

תרגיל: לפתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1-2i & 1 & 5 \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1-2i & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-2i & 1 & 5 \\ i & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - iR_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-2i & 1 & 5 \\ 0 & -i & 1-i & 3-5i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = iR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-2i & 1 & 5 \\ 0 & 1 & i+1 & 5+3i \end{array}\right)$$

$2-i(1-2i) = \cancel{2}-i+\cancel{2i^2}$ $\qquad$ $i(3-5i) = 3i-5i^2$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - (1-2i)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i-2 & -6+7i \\ 0 & 1 & 1+i & 5+3i \end{array}\right)$$

המשך ש"ב:

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - (1-2i)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i-2 & -6+7i \\ 0 & 1 & 1+i & 5+3i \end{array}\right)$$

$$1-(1-2i)(1+i) = 1-(1+i-2i-2i^2) = \cancel{1}-\cancel{1}-i+2i+2i^2 = i-2$$

$$5-(1-2i)(5+3i) = \cancel{5}-(\cancel{5}+3i-10i-\underbrace{6i^2}_{6}) = 7i-6$$

$$y+(1+i)z = 5+3i$$

x,y - איברים מובילים

נסמן - $z=t$

z - איבר חופשי.

$$y+(1+i)t = 5+3i$$

$$y = 5+3i-(1+i)t$$

$$x+(i-2)t = -6+7i$$

$$x = -6+7i-(i-2)t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6+7i-t(-2+i) \\ 5+3i-t(1+i) \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

תרגיל: (אוהבים לתת במבחנים)

מצאו - לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת פתרון יחיד, אין פתרון/∞ פתרונות, אם אינסוף למצוא פתרון כללי:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \text{(מועד B)}$$

פתרון:

שלב א' - להביא את המטריצה לצורה מדורגת.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=R_3-aR_1]{R_2=R_2-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & a(3-a) & 1-a & 5-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a(3-a) & 1-a & 5-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right)}_{\text{צורה מדורגת}}$$

שלב ב': מנתחים את המטריצה לפי הדיון במס' הפתרונות לעיל.

פתרון יחיד: צריך שלא יהיו משתנים חופשיים, כלומר - צריך ש- $1, a(3-a), 1-a$ יהיו איברים מובילים, כלומר - שונים מ-0

$$\Leftarrow \quad a(3-a)\neq 0 \quad \wedge \quad 1-a\neq 0$$

$$\boxed{a\neq 0} \quad \boxed{a\neq 3} \qquad \boxed{a\neq 1}$$

לרשום - ב האופציות האחרות שלנו אמורות לקרות באופן גליב אחת מהאופציות הנ"ל, אז-באמת נבדוק אותם אחת אחת ונקבל.

נ.ב - $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{שורת סתירה}} \boxed{\text{אין פתרון}}$$

נ.ב $a=0$:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{\text{לא צורה לא מדורגת}} \xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{שורת סתירה}} \boxed{\text{אין פתרון}}$$

נדרג

נ.ב $a=3$:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)}_{\text{לא צורה מדורגת}} \xrightarrow[R_2=-\frac{1}{2}R_1]{R_3=R_3-R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

סימן איברים מובילים ברורה:

⇐ y חופשי ⇐ נסמן - $y=t$

וגם - $\boxed{\infty \text{ פתרונות}}$

ונציב חזרה למשוואה ← $\boxed{z=-1}$

$$x+3t+z=1$$

$$x+3t-1=1$$

$$x+3t=2$$

$$\boxed{x=2-3t}$$

ולכן - קב' הפתרונות:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \; t\in\mathbb{R} \right\}$$

אלגברה מטריצות:

סימון: אוסף המטריצות מגודל $m\times n$ לאיברים משדה $\mathbb{F}$ מסומן- $\mathbb{F}^{m\times n}$ או- $\boxed{M_{m\times n}(\mathbb{F})}$

הגדרה: שוויון מטריצות- נאמר: מטריצות A,B שוות אם:
1) הן מאותו גודל.
2) לכל i,j מתקיים $A_{ij}=B_{ij}$
(שוויון איבר איבר)

דוגמאות:

קבעו האם המטריצות הבאות שוות:

1. $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ כך שכל איבריה 1, $B\in M_{3\times4}(\mathbb{R})$ כך שכל איבריה 1

2. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$

אלגברה מטריצות:

סימון: אוסף המטריצות מגודל $m\times n$ על איברים משדה $\mathbb{F}$ מסומן $\mathbb{F}^{m\times n}$ או- $\boxed{M_{m\times n}(\mathbb{F})}$

הגדרה: שוויון מטריצות- נאמר: מטריצות A,B שוות אם:
1) הן מאותו גודל.
2) לכל i,j מתקיים $A_{ij}=B_{ij}$

(שוויון איבר איבר)

דוגמאות:

קבעו האם המטריצות הבאות שוות:

1

$A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ כך שכל איבריה 1, $B\in M_{3\times4}(\mathbb{R})$ כך שכל איבריה 1.

לא, אינן מאותו גודל.

2

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$$

לא, אין שוויון איבר איבר

(שוויון איבר איבר)

פעולות במטריצות:

1) **חיבור מטריצות:** חיבור איבר איבר.

פורמלית: יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, אזי החיבור שלהם $A+B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדר-

לכל i,j

$$\underbrace{(A+B)_{ij}}_{\text{האיבר ה-}ij\text{ במטריצת הסכום}}=(A)_{ij}+(B)_{ij}$$

דוג:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}$$

2) **חיסור מטריצות** - זהה לחיבור

דוג:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}$$

3) **כפל בסקלר:** מכפילים כל 1 מאיברי המטריצה בסקלר (ומקבלים).

פורמלית: יהיו $\alpha\in\mathbb{F}$, $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אזי- $\alpha\cdot A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ומתקיים-

$$(\alpha A)_{ij}=\alpha\cdot(A)_{ij}$$

דוג:

$$3\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&9\\12&15&18\end{pmatrix}$$

4) **כפל מטריצות:** (שיטת-עליני) ולבדוק שבכלל הכפל מוגדר, כלומר - שמס' העמודות של המטריצה ~~הימנית~~ השמאלית שווה למס' השורות של המטריצה הימנית.

דוגמא:

קבעו האם כפל המטריצות מוגדר. ואם כן - מה גודל המכפלה?

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

4) **כפל מטריצות:** (גושית-עלינו לבדוק שהכפל מוגדר, מוגדר - שמס' העמודות של המטריצה הימנית
זהה למס' השורות של המטריצה השמאלית.

דוגמא:

קבעו האם כפל המטריצות מוגדר. ואם כן - מה גודל המכפלה?

1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

מוגדר- ותוצר הכפל מטריצה 3×3

2

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{3\times 3}$$

$2 \neq 3$

לא מוגדר

4) **כפל מטריצות:** (שורה-עמודה) לבדוק שהכפל מוגדר, כלומר- שמס' העמודות של המטריצה ~~הימנית~~ השמאלית
שווה למס' השורות של המטריצה הימנית.

פורמלית: - אם $A\in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in \mathbb{F}^{n\times k}$ אזי: $AB\in \mathbb{F}^{m\times k}$

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

כלומר- $(AB)_{ij}=R_i(A)\cdot C_j(B)$

סימון: $R_i(A) =$ שורה i של A
$C_j(B) =$ עמודה j של B.

דוג': מצאו את האיבר ה-1,1 של AB כאשר

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{1,1}=R_1(A)\cdot C_1(B)=\begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+5\cdot 1=-1+5=4$$

צש: חשבו את המטריצה AB כעת.

$$AB = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}}^{3\times 2} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}^{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 4 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}$$

מטריצה גודל
מצפים שהתוצאה
תהיה? 3×2

בהמשך - נבין למה הגדרנו ככה כפל.

תכונות:

1) אסוציאטיביות הכפל: $(AB)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

2) פילוג: $A(B+C) = AB+AC$

3) הוצאת סקלר: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

4) חילוף בחיבור: $A+B = B+A$

שימו ♡ - באופן כללי כפל מטריצות **לא** חייב להיות חילופי.

דוג' שכן - חילופי:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

וגם-

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

דוג' שלא - חילופי:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&16\\29&36\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&22\\23&34\end{pmatrix}$$

הוכחת תכונה 1 (אסוציאטיביות):

נסמן - $A\in\mathbb{F}^{m\times n},\ B\in\mathbb{F}^{n\times p},\ C\in\mathbb{F}^{p\times l}$

1) נחשב את הגודל של כל מכפלת מטריצות.

אגף שמאל:

$$(AB)\cdot C:\ \underbrace{A}_{m\times n}\ \underbrace{B}_{n\times p} \Rightarrow \underbrace{A\cdot B}_{m\times p}\ \underbrace{C}_{p\times l} \Rightarrow (AB)\cdot C$$

מגודל $m\times l$.

אגף ימין:

$$A\cdot(B\cdot C)\quad \underbrace{A}_{m\times n}\quad \underbrace{\underbrace{B}_{n\times p}\cdot\underbrace{C}_{p\times l}}_{n\times l} \Rightarrow m\times l$$

2) נראה שוויון של כל האיברים

אגף שמאל:

$p \leftarrow$ רצים עד המשותף

$$((AB)\cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}(A)_{is}(B)_{sk}(C)_{kj}$$

לפי הגד' כפל מטריצות   לפי הגד' כפל מטריצות

אגף ימין:

$$\big(\underbrace{A}_{m\times n}\cdot\underbrace{(BC)}_{n\times l}\big)_{ij} = \sum_{s=1}^{n}(A)_{is}\cdot(BC)_{sj} = \sum_{s=1}^{n}(A)_{is}\cdot\sum_{k=1}^{p}(B)_{sk}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}(A)_{is}(B)_{sk}(C)_{kj}$$

בגלל שהכל מס' וסכומים סופיים אפשר לשנות את סדר הסכימה

ולכן - מתקיים.

תזכורת:

כפי שראינו - כל מערכת ניתן לכתוב את (מערכת המשוואות) בצורה מטריצית

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ \text{מטריצת המקדמים}}} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{b \\ \text{וקטור הפתרון}}}$$

וכן - $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטור הנעלמים

לפי הגדרת כפל מטריצות מתקיים - $A\bar{x} = b$. כלומר לבדוק עצמם כשווים ב.ה

תרגיל: תנו מקרה שבו אין פתרון למערכת הלא הומוגנית ויש פתרון א"ט למערכת ההומוגנית.

תרגיל: תנו מקרה שבו אין פתרון למערכת הלא הומוגנית ויש פתרון יח"ד למערכת ההומוגנית.

פתרון:

נביט במטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ובוקטור הפתרונות $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

במערכת $Ax=b$ ישנה שורת סתירה $\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right)$ ולכן אין פתרון.

ולמערכת ההומוגנית יש פתרון יח"ד $(0,0) \Leftarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$

תרגיל:

מצאו מקרה שבו אין פתרונות למערכת הלא הומוגנית, אך יש ∞ פתרונות למערכת ההומוגנית.

תרגיל:

מצא מקרה שבו אין פתרונות למערכת הלא הומוגנית, אך יש ∞ פתרונות למערכת ההומוגנית.

פתרון: נביט במטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ובוקטור הפתרונות $b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ במערכת $Ax=b$ יש שורה סתירה ולכן אין לה פתרונות.

ואילו: $\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow$ נשים ♡ כי y הוא חופשי ואין שורה סתירה ולכן ∞ פתרונות

פתרון כללי $\left\{\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$

תרגיל.

נתון ששתי המשוואות עם שני הנעלמים. אם נתון שאין פתרון למערכת הלא הומוגנית
מה ניתן לומר על מס' הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

תרגיל:

נתון שמס' המשוואות גדול ממס' הנעלמים. עוד נתון שאין פתרון למערכת הלא הומוגנית

מה ניתן לומר על מס' הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

פתרון:

נדרג את המטריצה A מכיוון שאין פתרון למערכת הלא הומוגנית, חייבת להיות שורת אפסים בצורה המדורגת של A (אחרת - יש אותו מס' של איברים מובילים ושל משתנים ולכן - אין משתנים חופשיים וכל משתנה נקבע באופן יחיד ע"י וקטור הפתרון) מכיוון שיש שורת אפסים בצורה המדורגת, יש משתנה חופשי ולכן - יש יותר מפתרון אחד למערכת ההומוגנית.

מס' הפתרונות - לפי משפט מההרצאה $(\text{מס' איברים בשדה})^{\text{מס' משתנים חופשיים}}$

תרגיל:

נתונה מערכת של m משוואות ב-n נעלמים. $Ax=b$.

נסמן - $H=\{v\in\mathbb{F}^n : Av=0\}$ קב' הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה

$L=\{v\in\mathbb{F}^n : Av=b\}$ קב' הפתרונות של המערכת הלא-הומוגנית

נניח כי $L\neq\emptyset$ ויהי $v_1\in L$ פתרון של המערכת הלא-הומוגנית.

צ"ל: $L=\{v_1+v \mid v\in H\}=v_1+H$

הוכחה:

נוכיח הכלה ב2 כיוונים.

כיוון ראשון - $\subseteq$

יהי $w \in L$, נרצה להראות כי $w \in v_1 + H$ נגדיר - $v = w - v_1$ ואז - $w = v_1 + v$

נותר להראות כי $v \in H$. כלומר כי מתקיים כי $Av = 0$

$$Av \underset{\text{הגדרת } v}{=} A(w - v_1) \underset{\text{פילוג}}{=} Aw - Av_1 = b - b = 0$$

ואכן - מתקיים.

כיוון שני - $\supseteq$

ניקח $v \in H$ כלשהו ונראה כי - $v_1 + v \in L$

אכן $A(v_1 + v) \underset{\text{פילוג}}{=} Av_1 + Av = b + 0 = b$

בהצלחה!!!