מבחן מועד א' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 20/06/24

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2) - x^2}{x^6} & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} & x = 0 \end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל$f(x)$.

ב. חשבו את $f^{(4)}(0)$.

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \frac{\ln(n + x^2)}{n}$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בכל הממשיים.

ב. קבעו והוכיחו אם סדרת הנגזרות $f_n'(x)$ מתכנסת במידה שווה בכל הממשיים.

3. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית, ונניח כי לכל $y > 0$ מתקיים כי

$$u(x,y) = u\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

א. הוכיחו כי לכל $y > 0$ מתקיים כי $y^2 u_y(x,y) = -x\, u_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)$

ב. הוכיחו כי לכל $y > 0$ מתקיים כי $y\, u_y(x,y) + x\, u_x(x,y) = 0$

4. יהיו פרמטרים $a, b \in \mathbb{R}$ ותהי פונקציה $f(x,y) = x^2 - y^2 + ax + by$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a, b.

ב. מצאו וסווגו את הנקודות החשודות לקיצון מקומי, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a, b.

5. נטע הכינה עוגת יום הולדת לנעם, שהתחתית שלה היא התחום $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$
וגובהה הוא $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. מצאו את שטח הפנים ואת הנפח של העוגה של נעם.

6. נסמן בM את שטח הפנים העליון של העוגה של נעם:

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

נעם נשפה על מנת לכבות את הנרות שעל העוגה, עוצמת לחץ האוויר שיצרה מתואר על ידי השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x,y,z) = (1-z)\hat{\imath} + (1-z)\hat{\jmath} + (1-z)\hat{k}$$

חשבו את השטף של האוויר שפגע בעוגה, כלומר את האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

כאשר הנורמל $\hat{n}$ מכוון כלפי פנים העוגה.

טורי טיילור

מקדמי טיילור וטורים ידועים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

גזירות בשני משתנים

דיפרנציאביליות

הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{f(x+a,y+b)-f(x,y)}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{f_x(x,y)\cdot a + f_y(x,y)\cdot a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

משוואת מישור משיק

נוסחא כללית לחישוב מישור משיק לפונקציה הגזירה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) כאשר $z_0 = f(x_0,y_0)$

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

גרדיאנט ונגזרת כיוונית

הגרדיאנט של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\right)$$

נגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\vec{v}$ היא

$$f'_{\vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

כלל השרשרת

תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ותהיינה $x(t), y(t)$ גזירות. נביט בפונקציה המורכבת $h(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$ אזי

$$h'(t) = f_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + f_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)$$

קיצון מקומי ומוחלט

נקודות חשודות (קריטיות) לקיצון מקומי

נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס

$$\nabla f(x,y) = \left(f_x, f_y\right) = (0,0)$$

מבחן הנגזרת השנייה

לכל נקודה חשודה נבצע את התהליך הבא:

1. נחשב את $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$
2. אם $\Delta(x,y) < 0$ מדובר בנקודת אוכף, כלומר נקודה חשודה שאינה קיצון מקומי

3. אם $\Delta(x,y) > 0$ מדובר בקיצון מקומי

א. אם $f_{xx}(x,y) > 0$ מדובר במינימום מקומי

ב. אם $f_{xx}(x,y) < 0$ מדובר במקסימום מקומי

מציאת קיצון מוחלט

בהנתן פונקציה $f(x,y)$ ותחום D נרצה למצוא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x,y)$ כאשר $(x,y) \in D$.

1. נאסוף נקודות חשודות מפנים התחום, אלה נקודות בתחום בהן הגרדיאנט מתאפס.
2. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום באמצעות כופלי לגראנז':

א. נתאר את שפת התחום D ע"י המשוואה $g(x,y) = 0$

ב. נפתור את מערכת המשוואות בשלושת הנעלמים (x,y,λ)

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ג. לכל פתרון (x,y,λ) הנקודה (x,y) היא נקודה חשודה על הקצה

3. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום עבורן $g(x,y) = 0$ וכן $\nabla g(x,y) = (0,0)$.
4. נציב את כל הנקודות החשודות משני הסעיפים הקודמים בפונקציה, ונראה מה הכי גבוה ומה הכי נמוך.

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dxdy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dxdy$ הוא השטח של התחום D.

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b, h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dxdy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x,y) \in D \qquad (u,v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\cdot |J|dudv$$

<u>קואורדינטות קוטביות</u>

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x,y) \in D \qquad (r,\theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)rdrd\theta$$

<u>אינטגרלים משולשים</u>

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dxdydz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1dxdydz$ הוא הנפח של התחום V.

<u>חישוב אינטגרלים משולשים</u>

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dxdydz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

<u>שינוי קואורדינטות</u>

$$x = x(u,v,w)$$
$$y = y(u,v,w)$$
$$z = z(u,v,w)$$

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}\right|$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (u,v,w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|dudvdw$$

<u>קואורדינטות גליליות</u>

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = z$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \cdot rdrd\theta dz$$

<u>קואורדינטות כדוריות</u>

$$x = rsin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = rsin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = rcos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,\phi) \in V'$$

$$\iiint_V fdxdydz = \iiint_{V'} f\big(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), rcos(\theta)\big) \cdot r^2\sin(\theta)\, drd\theta d\phi$$

<u>אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור</u>

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C fdr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1dr$ הוא אורך המסילה.

<u>חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור</u>

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

$$t \in [a,b]$$

אזי

$$\int_C fdr = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt$$

<u>אינטרגלים קוויים מסוג ראשון במרחב</u>

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C fdr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1dr$ הוא האורך של המסילה.

<u>חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב</u>

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$
$$t \in [a,b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2} dt$$

<u>אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור</u>

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

<u>חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור</u>

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t)\big) dt$$

<u>אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב</u>

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

<u>חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב</u>

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(r(t)\big) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) dt$$

<u>סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני</u>

$$\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P\big(\vec{r}(t)\big) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q\big(\vec{r}(t)\big) \cdot y'(t) dt$$

<u>משפט גרין</u>

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות

אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב לC נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $curl\big(\vec{F}\big)$ על התחום D.

נסמן

$$\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D curl\big(\vec{F}\big) dxdy = \iint_D \big(Q_x - P_y\big) dxdy$$

<u>אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון</u>

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקצית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

<u>חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון</u>

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| dudv$$

<u>אינטגרלים משטחיים מסוג שני</u>

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ויהי כיוון לנורמל למשטח.

אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

<u>חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני</u>

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) dudv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

<u>משפט גאוס (דיברגנץ)</u>

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V div\big(\vec{F}\big) dxdydz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dxdydz$$

<u>משפט סטוקס</u>

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M rot\big(\vec{F}\big) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$