משטחים מינימליים

הגדרה

משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ נקרא מינימלי אם העקמומיות הממוצעת שלו מתאפסת זהותית. כלומר לכל $P \in M$, $H(P) = 0$.

הגדרה שקולה

לכל נקודה $P \in M$ יש סביבה D_P שהיא התוצאה של טבילת שפתה ∂D_P במי סבון אידאליים.

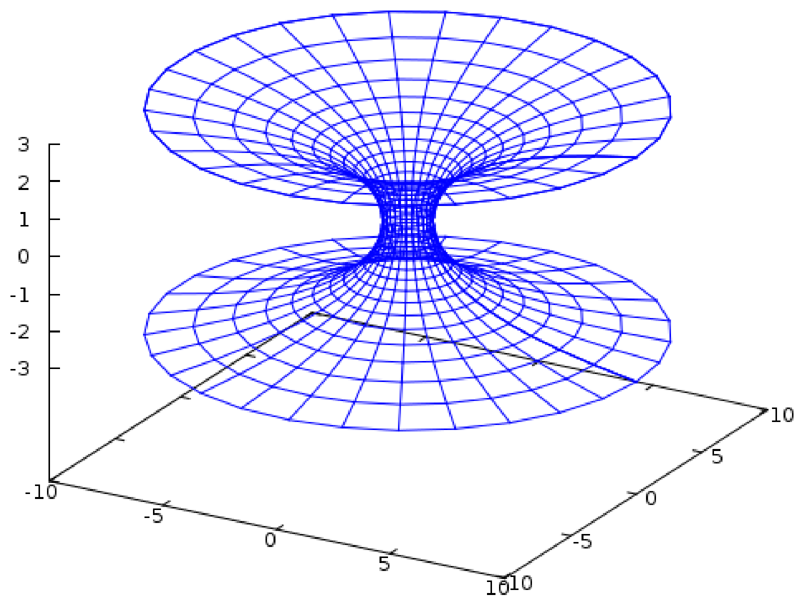
דוגמאות

- מישור הוא משטח מינימלי
- ספירה היא לא משטח מינימלי

תרגיל

הוכיחו שהקטנואיד(Catenoid) שהוא משטח הסיבוב של העקומה $x = \cosh z$ הוא משטח מינימלי.

פתרון



פרמטריזציה עבור העקומה $x=\cosh z$ היא

$$x=\cosh\phi=f\left(\phi\right)$$
$$z=\phi=g\left(\phi\right)$$

$-\infty<\phi<\infty$. פרמטריזציה עבור הקטנואיד:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\begin{pmatrix}f\left(\phi\right)\cos\theta\\ f\left(\phi\right)\sin\theta\\ g\left(\phi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\phi\cos\theta\\ \cosh\phi\sin\theta\\ \phi\end{pmatrix}$$

רוצים להראות $H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ S=0$. נחשב נגזרות ראשונות:

$$r_\theta=r_{,1}=\begin{pmatrix}-\cosh\phi\sin\theta\\ \cosh\phi\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\qquad r_\phi=r_{,2}=\begin{pmatrix}\sinh\phi\cos\theta\\ \sinh\phi\sin\theta\\ 1\end{pmatrix}$$

התבנית היסודית הראשונה:

$$g_{11}=\left\langle r_{,1},r_{,2}\right\rangle=\cosh^2\phi\qquad g_{12}=0=g_{21}\qquad g_{22}=\sinh^2\phi+1=\cosh^2\phi$$

(לפי הזהות $\cosh^2-\sinh^2=1$)

$$\Downarrow$$

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh^2\phi \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sech}^2\phi & 0 \\ 0 & \mathrm{sech}^2\phi \end{pmatrix}$$

(כמו ש $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, כך גם $\mathrm{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}$)

הנורמל:

$$\vec{n} = r_{\prime 1} \times r_{\prime 2} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa} \\ -\cosh\phi\sin\theta & \cosh\phi\cos\theta & 0 \\ \sinh\phi\cos\theta & \sinh\phi\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

...<חישוב משעמם>...

$$\hat{n} = (\mathrm{sech}\phi\cos\theta, \mathrm{sech}\phi\sin\theta, -\tanh\phi)$$

נגזרות שניות:

$$r_{\theta\theta} = r_{\prime 11} = (-\cosh\phi\cos\theta, -\cosh\phi\sin\theta, 0)$$

$$r_{\theta\phi} = r_{\prime 12} = (-\sinh\phi\sin\theta, \sinh\phi\cos\theta, 0) = r_{\prime 21}$$

$$r_{\prime 22} = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, 0)$$

תבנית יסודית שנייה:

$$b_{11} = \langle r_{\prime 11}, \hat{n}\rangle = -1 \qquad b_{12} = 0 = b_{21} \qquad b_{22} = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אופרטור הצורה:

$$S = G^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \mathrm{sech}^2\phi & 0 \\ 0 & \mathrm{sech}^2\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sech}^2\phi & 0 \\ 0 & \mathrm{sech}^2\phi \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ S = 0 \qquad \checkmark$$

שדות וקטוריים

הגדרה

יהי M משטח רגולרי. שזה וקטורי בקבוצה פתוחה $U \subseteq M$ הוא פונקציה v השולחת כל נקודה $p \in U$ אל וקטור משיק $v(P) \in T_P M$.

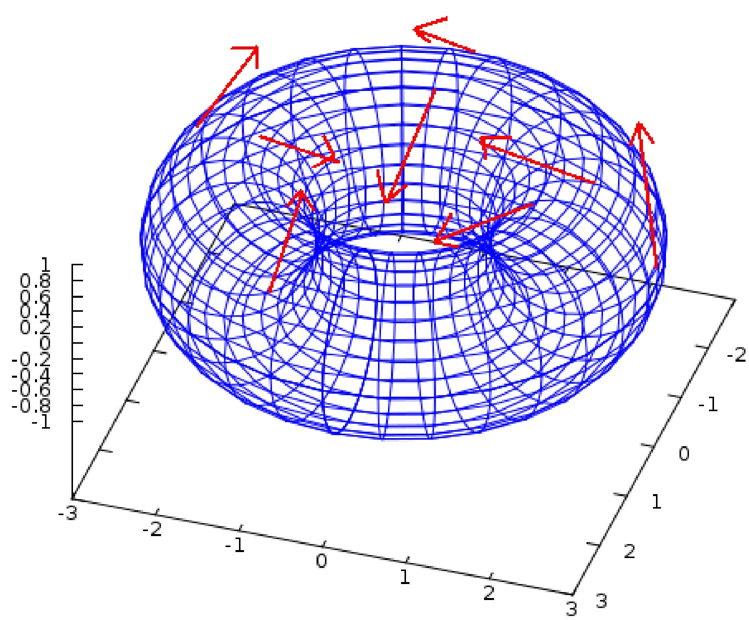
אומרים שהשדה v גזיר בנקודה $P \in U$ אם ישנה פרמטריזציה $r(u,v)$ כל שבסביבת P, הפונקציות $a(u,v), b(u,v)$ המוגדרות ע"י

$$v(P) = a(u,v)\, r_{\prime 1} + b(u,v)\, r_{\prime 2}$$

הן גזירות.

דוגמה

נתחיל עם המעגל $(x-2)^2 + z^2 = 1$ במישור $[xz]$. יש לו פרמטריזציה $\begin{cases} x = 2+\cos\phi \\ z = \sin\phi \end{cases}$ כלומר $0 \le \phi \le 2\pi$ $\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} 2+\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$. וקטור הנגזרת $\gamma'(\phi) = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$ נותן משיק למעגל בכל נקודה. ע"י סיבוב סביב ציר ה-z, המעגל הופך לטורוס, והוקטורים האדומים נותנים שדה משיק על הטורוס:



ביתר פירוט, פרמטריזציה של הטורוס

$$r\left(\theta,\phi\right)=\begin{pmatrix}\left(2+\cos\phi\right)\cos\theta\\ \left(2+\cos\phi\right)\sin\theta\\ \sin\phi\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{c}0\leq\phi\leq2\pi\\ 0\leq\theta\leq2\pi\end{array}$$

הוקטורים המשיקים למעגיל הם $\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}$, והמשטח שלנו הוא משטח סיבוב עם מטריצת הסיבוב $R_z\left(\theta\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ולכן השדה הוקטורי הוא

$$v\left(\theta,\phi\right)=R_z\left(\theta\right)\cdot\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ 0\\ \cos\phi\end{pmatrix}$$

$$v\left(\theta,\phi\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ 0\\ \cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ 0\\ \cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\cos\theta\\ -\sin\phi\sin\theta\\ \cos\phi\end{pmatrix}$$

הv הזה הוא שדה שמשיק לטורוס בכל נקודה.
נראה מהן הפונקציות a,b. נחשב נגזרות חלקיות:

$$r_\theta=r_{\prime1}=\begin{pmatrix}-\left(2+\cos\phi\right)\sin\theta\\ \left(2+\cos\phi\right)\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\qquad r_\phi=r_{\prime2}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\cos\theta\\ -\sin\phi\sin\theta\\ \cos\phi\end{pmatrix}$$

דורשים $v=a\left(\theta,\phi\right)r_{\prime1}+b\left(\theta,\phi\right)_{\prime2}$, ובשביל זה צריך לקחת:

$$a\left(\theta,\phi\right)\equiv0\qquad b\left(\theta,\phi\right)\equiv1$$

a,b פונקציות גזירות(אפילו C^∞), ולכן השדה v גזיר(ואפילו C^∞)

הערה

באמת, היינו צריכים לקחת אי שוויונות חזקים $\begin{array}{c}0<\theta<2\pi\\ 0<\phi<2\pi\end{array}$ ויוצא שלא מכסים את כל הטורוס.

הגדרה

העקומה $\gamma\left(t\right)$ נקראת קו אינטגרלי של שדה וקטורי v, אם $\dot{\gamma}\left(t\right)=v\left(\gamma\left(t\right)\right)$.
במילים אחרות, γ "זורמת" לפי כיוון השדה v.

תרגיל

יהי $M=\mathbb{R}^2$ ויהי v השדה הקבוע $v\left(P\right)\equiv\left(1,2\right)$. מצא את העקומות האינטגרליות.

פתרון

כדי ש $\left(\gamma^1(t),\gamma^2(t)\right) = \gamma(t)$ תהיה עקומה אינטגרלית, צריכים:

$$\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\gamma}^1\\ \dot{\gamma}^2\end{pmatrix} = v\begin{pmatrix}\gamma^1\\ \gamma^2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\dot{\gamma}^1\\ \dot{\gamma}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= t+a\\ \gamma^2 &= t+b\end{aligned} \qquad \gamma = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

אלו קוים ישרים ששוחים בכיוון $(1,2)$.

תרגיל

מצאו את כל העקומות האינטגרליות עבור השדה הוקטורי(שדה משיק) v על האורוס מהדוגמה הקודמת.

פתרון

עקומה γ על הטורוס יכולה להיכתב בצורה:

$$r(\theta(t),\phi(t)) = \gamma(t) = \begin{pmatrix}(2+\cos\phi(t))\cos\theta(t)\\ (2+\cos\phi(t))\sin\theta(t)\\ \sin\phi(t)\end{pmatrix}$$

צריך למצוא $\begin{aligned}\theta(t) &= ?\\ \phi(t) &= ?\end{aligned}$. באגף ימין:

$$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix}-\sin\phi(t)\cos\theta(t)\\ -\sin\phi(t)\sin\theta(t)\\ \cos\phi(t)\end{pmatrix}$$

באגף שמאל יש את $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix}-\sin\phi(t)\,\dot{\phi}(t)\cos\theta(t) - (2+\cos\phi(t))\sin\theta(t)\,\dot{\theta}(t)\\ -\sin\phi(t)\,\dot{\phi}(t)\sin\theta(t) + (2+\cos\phi(t))\cos\theta(t)\,\dot{\theta}(t)\\ \cos\phi(t)\,\dot{\phi}(t)\end{pmatrix}$$