נקודות קיצון מקומיות

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ עבור $U\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה. נניח שלf קיימות נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בנקודה $p_0=(x_0,y_0)\in U$. אם $f'_x(p_0)=0$ וגם $f'_y(p_0)=0$ אז p_0 תקרא נקודה קריטית. נקודה זו נקודה החשודה כקיצון מקומי של הפונקציה.
נסמן:

$$A=f''_{xx}(p_0)\,,B=f''_{xy}(p_0)\,,C=f''_{yy}(p_0)$$

וכן

$$\Delta=\begin{Vmatrix}A & B\\ B & C\end{Vmatrix}$$

כללים

(א) אם $\Delta>0$ ו$A>0$ אז p_0 נקודת מינ' מקומית.

(ב) אם $\Delta>0$ ו$A<0$ אז p_0נקודת מקס' מקומית.

(ג) אם $\Delta=0$- לא ידוע, נצטרך לבדוק מפורשות.

(ד) אם $\Delta>0$ ו$A=0$, אז בדומה לאפשרות (ג)

(ה) אם $\Delta<0$אז p_0 לא נקודת קיצון. p_0 תקרא נקודת אוכף

הערה

אם גילינו שp_0 נקודת קיצון, אז אם בסביבה שלה נקודתה קיצון יחידה, ונאמר שהיא קיצון חזקה. אם אין סביבה כזו(קטע רציף של נקודות קיצון) אז היא נקודת קיצון לא חזקה.

הפונקציה ההפוכה

משפט

תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^n$. נניח $f\in C^i(A)$. תהי $a\in A$. אם $\nabla f(a)\neq 0$(הדטרמיננטה של היעקוביאן), אז קיימת קבוצה פתוחה U כך ש$a\in U\subseteq A$. עבור $V=f(U)$, גם קבוצה פתוחה, f פונקציה חח"ע ועל מU לV וקיימת פונקציה הפוכה $f^{-1}:V\to U$ וגם היא חח"ע ועל ו$f^{-1}\in C^i(V)$

דוגמה 1

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י

$$f(x,y)=\left(x+(y+2)^2+1,(x-1)^2+y+1\right)$$

הוכיחו כי קיימת לf פונקציה הפוכה בסביבת הנקודה $(1,-2)$.

פתרון

נמצא את היעקוביאן.

$$\Delta f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2(y+2)\\ 2(x-1) & 1\end{vmatrix}=1-4(x-1)(y+2)=1\neq 0$$

לכן ברור כי לפונקציה $f(x,y)$ קיימת פונקציה הפוכה בסביבת הנקודה $(1,-2)$

דוגמה 2

תהי $f(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. הוכיחו כי f הפיכה בסביבת כל נקודה פרט ל$(0,0)$, חשבו את f^{-1} שם.

פתרון

תחילה נבדוק דטרמיננטה. ברור שהפונקציה אינה גזירה בנקודה $(0,0)$. לכן פרט לנקודה $(0,0)$ נקבל

$$\Delta f(x,y)=\begin{vmatrix}\overbrace{\frac{x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}}^{\tilde{f}'_{1x}} & \overbrace{-\frac{2yx}{x^2+y^2}}^{\tilde{f}'_{1y}}\\ \underbrace{-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}}_{\tilde{f}'_{2x}} & \underbrace{\frac{y^2+x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{\tilde{f}'_{2y}}\end{vmatrix}=\frac{(y^2-x^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}-\frac{4y^2x^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{-(y^2-x^2)^2-4y^2x^2}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-(y^4-2x^2y^2+x^4)-4y^2x^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{-(y^4+2x^2y^2+x^4)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-(y^2+x^2)^2}{(x^2+y^2)^4}=-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

ברור ש$(x,y)\neq(0,0)$, ולכן מתקיים $\Delta f(x,y)\neq 0$, ולכן f הפיכה בכל נקודה פרט ל$(0,0)$

נחשב f^{-1}

נסמן $v=\frac{x}{x^2+y^2}$, נסמן $u=\frac{y}{x^2+y^2}$. "ננסה" להגיע למצב בו נתאר את x וy כפונקציה של u וv.

$$v=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow v\left(x^2+y^2\right)=x\Rightarrow x^2+y^2=\frac{x}{v}$$

(נניח כרגע ש$v\neq 0$). באופן דומה:

$$u=\frac{y}{x^2+y^2}\Rightarrow u=\frac{y}{\frac{x}{v}}\Rightarrow u=\frac{vy}{x}\Rightarrow x=\frac{vy}{u}$$

(נניח כרגע שגם $u\neq 0$)
נציב זאת במשוואה במקורית של v, הכוונה:

$$v=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow v=\frac{\frac{vy}{u}}{\left(\frac{vy}{u}\right)^2+y^2}=\frac{\frac{vy}{u}}{\frac{v^2y^2}{u^2}+\frac{u^2y^2}{u^2}}=\frac{u^2vy}{uy^2\left(v^2+u^2\right)}\Rightarrow v=\frac{uv}{y\left(v^2+u^2\right)}$$

$$(*)\ \boxed{y=\frac{u}{v^2+u^2}}$$

באופן דומה ניתן למצוא את

$$x=\frac{vy}{u}=\frac{v}{u}y=\frac{v}{v^2+u^2}$$

קיבלנו עד עכשיו כי

$$f^{-1}\left(v,u\right)=\left(\frac{v}{v^2+y^2},\frac{u}{v^2+u^2}\right)$$

נשים לב שבמהלך החישוב חילקנו בu וv. לכן נבדוק עבור $u=0$ או $v=0$.

אם $v=0$ נקבל $\frac{x}{x^2+y^2}=0 \Leftarrow x=0$. כזכור אנו מדברים על המקרה $(x,y)\neq(0,0)$, ולכן $y\neq 0$, ולכן גם $u\neq 0$.

הסבר כי מתקיים $u=\frac{y}{0^2+y^2}=\frac{1}{y}$

ראינו כי $y\neq 0$ ולכן גם $u\neq 0$. אם נציב $u=0$ נקבל ש$y=0$ ושוב $x\neq 0$, ולכן על אותה אנלוגיה $v\neq 0$, ולכן מוגדר היטב פרט לנקודה $(0,0)$

מסקנה

f הנ"ל מוגדרת היטב לכל נקודה פרט ל$(0,0)$, וגם f^{-1}.

דוגמה 3

הוכיחו כי הפונקציה $f\left(x,y\right)=\left(e^x\cos y,e^x\sin y\right)$ הפיכה לוקלית(כלומר בסביבה של כל נקודה) אבל f לא הפיכה גלובלית.

פתרון

נראה תחילה הפיכות לוקלית.

$$\Delta f(x,y)=\begin{vmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{vmatrix}=e^x\left(\cos^2 y+\sin^2 y\right)=e^x\neq 0$$

ולכן f הפיכה בסביבת כל נקודה.

נשאר להראות כי f לא הפיכה גלובלית. ברור כי f הנמ"ל אינה חח"ע ב-$\mathbb{R}^2$ כי מתקיים $f(x,y)=f(x,y+2\pi k)$ לכל $k\in\mathbb{Z}$. אם f אינה חח"ע $\Leftarrow$אינה הפיכה.

דוגמה 4

הראו כי $f(x,y,z)=(u,v,w)$ הפיכה גלובלית, ובפרט הפיכה לוקלית בכל נקודה, עבור

$$u=x, v=y^3, w=z^5$$

פתרון

נסתכל על הדטרמיננטה

$$\Delta=\begin{vmatrix}u'_x & u'_y & u'_z\\ v'_x & v'_y & v'_z\\ w'_x & w'_y & w'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3y^2 & 0\\ 0 & 0 & 5z^4\end{vmatrix}=3y^2 5z^4$$

אם y ו-z שונים מאפס אז f הפיכה לוקלית! (לפי המשפט כי הדטרמיננטה שונה מאפס).

עבור גלובליות:

$$u=v\Rightarrow x=u$$

$$v=y^3\Rightarrow v=\sqrt[3]{y}$$

$$w=z^5\Rightarrow z=\sqrt[5]{w}$$

ברור כי לכל u,v,w הפונקציות הנ"ל מוגדרות, ולכן

$$f^{-1}(u,v,w)=\left(u,\sqrt[3]{v},\sqrt[5]{w}\right)$$

שברור שהפיכה גלובלית כי הפונקציה הנ"ל חח"ע ועל, ומוגדרת היטב.

פונקציות סתומות

משפט

תהי פונקצי $f:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^{n}$. נסמן:

$$f\left(x_1,...x_m,y_1,...y_n\right)=f_1\left(x_1,...x_m,y_1\right),...f_n\left(x_1,...x_m,y_n\right)$$

תהי $p=\left(a_1,...a_m,b_1,...b_n\right)\in\mathbb{R}^{m+n}$ נקודה. נניח ש$f\in C^1\left(A\right)$ עבור A סביבה כלשהי של p, ובנוסף כי מתקיים $f\left(\vec{p}\right)=0$, אם

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\left(p\right)\right|=\begin{vmatrix}f'_{1y_1}\left(p\right) & ... & f'_{1y_n}\left(p\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f'_{ny_1}\left(p\right) & ... & f'_{ny_n}\left(p\right)\end{vmatrix}\neq0$$

אזי קיימת סביבה של הנקודה $a=\left(a_1,...a_m\right)\in\mathbb{R}^m$ בה ניתן להציג את $\left(y_1,...y_n\right)$ כפונקציות של $\left(x_1,...x_m\right)$, כלומר $y_j=g_j\left(x_1,...x_m\right)$, $1\leq j\leq n$, ושם מתקיים

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_j}\left(a\right)\right)n=\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_j}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right)$$

לכל $1\leq j\leq n$

דוגמה 4

האם המשוואה $\sin x+\frac{e^y-e^{-y}}{2}+1=0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x, $y=f\left(x\right)$?

פתרון

נסמן $f\left(x,y\right)=\sin x+\frac{e^y-e^{-y}}{2}+1$. נתבונן בכל נקודה $\left(x_0,y_0\right)$ המקיימת את המשוואה. נמצא נגזרות חלקיות

$$f'_x\left(x,y\right)=\cos x\quad f'_y\left(x,y\right)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

ברור שf,f'_y,f'_x רציפות בכל נקודה, ובפרט $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. כמו כן קיים $f\left(x_0,y_0\right)=0$ (לפחות הצבענו על אחד כזה). מעצם הגדרת הנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ ברור כי $f'_y\left(x_0,y_0\right)=\frac{e^{y_0}+e^{-y_0}}{2}>0$ ולכן לפי המשפט קיימת סביבה של x_0 בה ניתן להציג את y כפונקציה סתומה של x, $y=f\left(x\right)$.