פתרון תרגיל בית 5 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א׳ תשע״ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת״ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך יח׳ כסלו ה׳תשע״ז, 18.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה וH, N תת-חבורות שלה. נסחו את ההנחות הבאות ע״י משפטים לוגים (עם $\exists$ ו $\forall$) מהצורה $ab = cd$ בלבד.

1. G אבלית.
2. N אבלית.
3. N נורמלית בG.
4. $NH = HN$.

פתרון.

1. $\forall a, b \in G\, ab = ba$
2. $\forall a, b \in N\, ab = ba$
3. $\forall n \in N, g \in G\, \exists n' \in N\, ng = gn'$
4. $\forall n \in N.g \in G,\, \exists n' \in N.g' \in G\, ng = g'n'$

שאלה 2. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה, ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. מחלקה שמאלית היא ת״ח.
2. עבור חבורה ציקלית כל ת״ח היא נורמלית.
3. אם N נורמלית ב G אז $GN = NG$.
4. אם עבור ת״ח $N \leq G$ מתקיים $GN = NG$ אז N נורמלית.
5. אם ת״ח H היא אבלית אז היא נורמלית.
6. אם ת״ח H היא נורמלית אז היא אבלית.

פתרון. 1. לא נכון. למשל $\langle(23)\rangle(12)\langle(23)\rangle \subset S_3$ היא לא ת"ח. למעשה חוץ מהמחלקה הטריוויאלית (H) מחלקות הן לא ת"ח שכן אין בהן את איבר היחידה.

2. נכון. צקלית היא בפרט אבלית.

3. נכון.

4. לא נכון. למשל $\langle(12)\rangle$ היא לא נורמלית בS_3 אבל $\langle(12)\rangle S_3 = S_3\langle(12)\rangle$. למעשה תמיד מתקיים $GN = N = NG$ (למה?).

5. לא נכון. ראו דוגמא קודמת.

6. לא נכון. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ היא תח"נ של $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ אבל היא לא אבלית.

שאלה 3. חשבו את הסימן של התמורות הבאות וקבעו אם הן זוגיות או אי-זוגיות:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$

פתרון. 1. נפרק למחזורים זרים $(1253)(4)$ ולכן הסימן הוא $(-1)1 = -1$ והתמורה אי-זוגית.

2. בכתיב של מחזורים $(123\cdots 2n)$ האורך זוגי ולכן הסימן הוא -1 והתמורה זוגית.

שאלה 4. תהי $H \leq G$ ת"ח. נגדיר יחס $g \sim g'$ אם $\exists h \in H \;\; g = g'h$
הוכיחו כי זהו יחס שקילות.
הראו שמחלקות השקילות הן המחלקות $[g] = gH$ וקבוצת המנה היא G/H.

פתרון. נראה סימטריות: אם קיים $h \in H$ כך ש $g = hg'$ אזי $g' = h^{-1}g$ ו$h^{-1} \in H$ כי זו ת"ח.

שאלות להגשה

שאלה 5. תארו את הקוסטים השמאליים עבור תת-החבורות הבאות:

1. $\langle 4\rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$.

2. $\langle(123)\rangle \leq S_3$.

3. עבור $G = \langle a\rangle$ מסדר 15 : $\left\langle a^5\right\rangle \leq G$.

פתרון.

1. קבוצת המנה היא

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle = \{\langle 4\rangle, 1+\langle 4\rangle, 2+\langle 4\rangle, 3+\langle 4\rangle\}$$

2. קבוצת המנה היא:

$$S_3/\langle(123)\rangle = \{\langle(123)\rangle, (12)\langle(123)\rangle\}$$

3. הסדר של התת-חבורה הוא $o(a^5) = \dfrac{15}{(15,5)} = 3$ ולכן האינדקס הוא $\dfrac{15}{3} = 5$ וקבוצת המנה היא $\{\langle a^5\rangle, a\langle a^5\rangle, a^2\langle a^5\rangle, a^3\langle a^5\rangle, a^4\langle a^5\rangle\}$.

שאלה 6. הוכיחו כי $\langle(1,1)\rangle \le \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ הוא תת-חבורה מאינדקס אינסופי.

פתרון. נראה ש $\{(0,n)+\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ היא קבוצה אינסופית של קוסטים.
אם $(0,n)+\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = (0,m)+\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
זה אומר ש $(0,n)-(0,m) \in \langle(1,1)\rangle$
כלומר ש $(0,n-m) = (k,k)$ לאיזשהו $k\in\mathbb{Z}$.
כלומר $n-m = 0 \Leftarrow n = m$.

שאלה 7. המרכז (center) של חבורה G היא הקבוצה

$$Z(G) = \{x\in G \,|\, \forall g\in G\ gx = xg\}$$

1. הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח של G.
2. הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח נורמלית בG.
3. הוכיחו כי אם $G \rhd N$ אזי $Z(N) = \{x\in N \,|\, \forall y\in N\ xy = yx\}$ היא תת-חבורה נורמלית של G.

שימו לב: אתם יודעים שהמרכז של חבורה הוא תת-חבורה נורמלית ולכן ברור ש $Z(N) \lhd N$.
אבל אנחנו שאלנו אם זה נורמלי בG!

פתרון. 1. איבר היחידה בודאי נמצא במרכז.
סגירות לכפל: אם $x,y\in Z(G)$ צ"ל $xy\in Z(G)$ כלומר צריך להראות ש $(xy)g = g(xy)$ לכל $g\in G$. אמנם

$$g(xy) = (gx)y = (xg)y = x(gy) = x(yg) = (xy)g$$

סגירות להופכי: נניח $x\in Z(G)$ צ"ל $x^{-1}\in Z(G)$, כלומר צריך להראות ש $x^{-1}g = gx^{-1}$ לכל $g\in G$. אמנם

$$\begin{aligned} gx &= xg \\ g &= xgx^{-1} \\ x^{-1}g &= gx^{-1} \end{aligned}$$

2. נראה שהמרכז הוא ת"חנ: יהי $g\in G$, אזי

$$gZ(G) = \{gx \,|\, x\in Z(G)\} = \{xg \,|\, x\in Z(G)\} = Z(G)g$$

3. צריך להוכיח שלכל $g \in G$ ולכל $x \in Z(N)$ מתקיים $gxg^{-1} \in Z(N)$.
כדי להראות את זה נוכיח שלכל $n \in N$ מתקיים $\left(gxg^{-1}\right) n \left(gxg^{-1}\right)^{-1} n^{-1} = e$
(למה זה שקול?).

$$\left(gxg^{-1}\right) n \left(gxg^{-1}\right)^{-1} n^{-1} = gx\left(g^{-1}ng\right)x^{-1}g^{-1}n^{-1} = g\left(g^{-1}ng\right) x x^{-1}g^{-1}n^{-1} = nn^{-1} = e$$

שימו לב ש $x\left(g^{-1}ng\right) = \left(g^{-1}ng\right)x$ כי x מתחלף עם כל איבר של N ו- $g^{-1}ng \in N$ כי N היא תת-חבורה נורמלית.

שאלה 8. יהיו $H, K \leq G$ תת-חבורות כך ש $(|H|, |K|) = 1$ הוכיחו כי $H \cap K = \{e\}$.

פתרון. יהי $x \in H \cap K$, אזי:
$x \in H$ ולכן לפי משפט לגרנז $o(x) \mid |H|$.
$x \in K$ ולכן לפי משפט לגרנז $o(x) \mid |K|$.
ולכן $o(x) \mid (|H|, |K|) = 1 \Leftarrow o(x) = 1 \Leftarrow x = e$.

שאלה 9. מצאו את שתי הספרות האחרונות של $8074 + 23041^{199}$.

שאלה 10. תהי G חבורה ו$H \leq G$ תת-חבורה. נגדיר את הליבה של H בG להיות:

$$Core(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

.

1. הראו כי $Core(H) \subseteq H$.
2. הוכיחו כי לכל $g \in G$, gHg^{-1} היא ת"ח של G. הסיקו כי $Core(H)$ היא ת"ח של G.
3. הוכיחו כי $Core(H)$ נורמלית בG.

פתרון. 1. מכיוון ו $H = eHe^{-1}$ מופיע בחיתוך, ברור ש $Core(H) \subseteq H$.

2. נראה סגירות לכפל: $\left(gh_1g^{-1}\right)\left(gh_2g^{-1}\right) = gh_1(gg^{-1})h_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$.
נראה סגירות להופכי: $(ghg^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h^{-1}g^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$.
נראה שיש את איבר היחידה: $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$.

מכיוון וכל gHg^{-1} היא ת"ח, החיתוך של כולם הוא גם ת"ח. ולכן $Core$ הוא ת"ח.

3. ניקח $x \in Core(H)$ ו$g \in G$ ונראה ש $gxg^{-1} \in Core(H)$.

שאלות אתגר

את שאלות האתגר אין חובה לפתור, אך מומלץ לפחות לקרוא. אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 11. הוכיחו כי אין פתרון למשוואה $x^3 \equiv 2 \mod 151$.

פתרון. נחשב ש $\varphi(151) = 150$ ולכן לפי משפט פרמה הקטן $\left(x^3\right)^{50} = x^{150} \equiv 1 \pmod{151}$
נניח בשלילה שx מסוים הוא פתרון למשוואה, אזי $1 \equiv \left(x^3\right)^{50} \equiv (2)^{50} \equiv 32 \pmod{151}$ וזו סתירה.

.

שאלה 12. 1. הוכיחו כי חבורה היא לא איחוד של שתי תת-חבורות אמיתיות. כלומר שאם $G = H_1 \cup H_2$ אז $H_1 = G$ או $H_2 = G$.

2. תהא G חבורה שהיא איחוד של שלוש תת-חבורות אמיתיות, כלומר :

$$G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

.

(א) תנו דוגמא לחבורה כזאת (רמז: חבורה מסדר 4).

(ב) הוכיחו כי חיתוך של כל שתי תת-חבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

(ג) הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

(ד) הסק שהחיתוך הוא ת"ח נורמלית בG.

(ה) הראה שהאינדקס של החיתוך בG הוא 4.

פתרון. 1. נניח ש $G = H_1 \cup H_2$ ובשלילה נניח שקיימים איברים $x_1 \in H_1 \setminus H_2$ ו$x_2 \in H_2 \setminus H_1$. אזי $x_1x_2 \in G$ ולכן $x_1x_2 \in H_i$ לאיזשהו i אבל זה מוביל אותנו לסתירה כי אם למשל $x_1x_2 \in H_1$ אזי $x_2 = x_1^{-1}(x_1x_2) \in H_1$.

2. תהי $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$

(א) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle(1,0)\rangle \cup \langle(0,1)\rangle \cup \langle(1,1)\rangle$

(ב) בה"ב נוכיח $H_1 \cap H_2 \subseteq H_1 \cap H_2 \cap H_3$. יהי $x \in H_1 \cap H_2$.
לפי סעיף א בהכרח קיים איבר $y \in H_3 \setminus (H_1 \cup H_2)$ אזי $xy \in G$ ולכן $xy \in H_i$ לאיזשהו i.
אם $xy \in H_1$ אז $y = x^{-1}(xy) \in H_1$ בסתירה לבחירה של y , ובאופן דומה $xy \notin H_2$.
אם כן, $xy \in H_3$ ואז $x = (xy)y^{-1} \in H_3$ ולכן x נמצא בחיתוך של שלושת תת-החבורות.

(ג) לפי הסעיף הקודם, מספיק להראות בה"כ שלכל $x \in H_1$, $x^2 \in H_2$ או $x^2 \in H_3$.
אם $x \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$ אז ברור ש $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$ ולכן נניח ש $x \in H_1 \setminus (H_2 \cup H_3)$ (שוב לפי הסעיף הקודם).
נקח איבר $y \in H_2 \setminus (H_1 \cup H_3)$, אזי $xy \in H_3 \setminus (H_1 \cup H_2)$ בהכרח (אחרת נקבל ש $x \in H_2$ או $y \in H_1$ בדומה לסעיף הקודם).
ואז בהכרח $x(xy) = x^2y \in H_2 \setminus (H_1 \cup H_3)$ (כי אחרת נקבל ש $xy \in H_1$ או ש $x \in H_3$ וזו סתירה).
ואז $x^2 = (x^2y)y^{-1} \in H_2$ כדרוש.

(ד) יהי $y \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$ ו $x \in G$ כלשהו, נראה ש $xyx^{-1} \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$:

$$xyx^{-1} = (xy)(xy)y^{-1}x^{-2} \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$$

לפי הסעיף הקודם.

(ה) מכיוון והת"ח שונות, בהכרח ניתן למצוא איברים

$$x_1 \in H_1 \setminus (H_2 \cup H_3)$$
$$x_2 \in H_2 \setminus (H_1 \cup H_3)$$
$$x_3 \in H_3 \setminus (H_1 \cup H_2)$$

ולכן אם נסמן $H = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ אז יש לנו 4 קוסטים שונים $H,\, Hx_1,\, Hx_2,\, Hx_3$
ולכן האינדקס הוא לפחות 4.
אם $y \in H$ אז ברור ש $Hy = H$.
אם $y \in H_1 \setminus (H_2 \cup H_3)$ אז נראה ש $Hy = Hx_1$:
מספיק להראות $x_1 y^{-1} \in H_2$ לפי סעיפים קודמים.
אם $x_1 y^{-1} \in H_1 \setminus (H_2 \cup H_3)$ אז $(x_1 y^{-1}) x_3 \in H_2$ וגם $y^{-1} x_3 \in H_2$ לפי נימוקים דומים לסעיפים הקודמים,
ולכן $x_1 = (x_1 y^{-1}) x_3 \left(y^{-1} x_3\right)^{-1} \in H_2$ בסתירה!

בהצלחה!