89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 5

<u>שאלה 1</u>: (12 נקודות) תהיינה A,B,C,D קבוצות. הוכח או הפרך:

א) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

ב) אם $(A\times B)\cap(C\times D)=\emptyset$ אזי $(A\cap C=\emptyset)\vee(B\cap D=\emptyset)$.

ג) $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$.

<u>פתרון שאלה 1:</u>

א) נכון. יהי (x,y) זוג סדור שרירותי. נראה ש $(x,y)\in A\times(B\setminus C)\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$.

$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)\Leftrightarrow$ הגדרת הפרש קבוצות

$(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin(A\times C)\Leftrightarrow$ הגדרת מכפלה קרטזית

$(x\in A\wedge y\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge y\in C)\Leftrightarrow$ דה מורגן

$(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\notin A\vee y\notin C)\Leftrightarrow$ דיסטריביוטיביות

$\big((x\in A\wedge y\in B)\wedge x\notin A\big)\vee\big((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin C\big)\Leftrightarrow$ קומוטטיביות

$\big((x\in B\wedge y\in A)\wedge x\notin A\big)\vee\big((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin C\big)\Leftrightarrow$ אסוציאטיביות

$\big(x\in B\wedge(x\in A\wedge x\notin A)\big)\vee\big((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin C\big)\Leftrightarrow$ חוק המשלים

$(x\in B\wedge F)\vee\big((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin C\big)\Leftrightarrow$ חוק הזהות

$F\vee\big((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin C\big)\Leftrightarrow$ חוק הזהות

$(x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin C\Leftrightarrow$ אסוציאטיביות

$x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin C)\Leftrightarrow$ הגדרת הפרש קבוצות

$x\in A\wedge y\in B\setminus C\Leftrightarrow$ הגדרת מכפלה קרטזית

$(x,y)\in A\times(B\setminus C)$

ב) נכון. נוכיח ב contrapositive.

נניח $(A\cap C\neq\emptyset)\wedge(B\cap D\neq\emptyset)$ ונוכיח $(A\times B)\cap(C\times D)\neq\emptyset$.

מכיון ש $A\cap C\neq\emptyset$, קיים $x_0\in A\cap C$, כלומר $x_0\in A$ וגם $x_0\in C$.

מכיון ש $B\cap D\neq\emptyset$, קיים $y_0\in B\cap D$, כלומר $y_0\in B$ וגם $y_0\in D$.

מכיון ש $x_0\in A$ וגם $y_0\in B$ נובע ש $(x_0,y_0)\in A\times B$.

מכיון ש $x_0\in C$ וגם $y_0\in D$ נובע ש $(x_0,y_0)\in C\times D$.

נקבל ש $(x_0,y_0)\in(A\times B)\cap(C\times D)$, כלומר $(A\times B)\cap(C\times D)\neq\emptyset$.

לסיכום, אם $(A\times B)\cap(C\times D)=\emptyset$ אזי $(A\cap C=\emptyset)\vee(B\cap D=\emptyset)$.

ג) לא נכון. נראה דוגמה נגדית: $A=B=\{1\}$.

אזי $P(A\times B)=\big\{\emptyset,\{(1,1)\}\big\}$ ואילו $P(A)\times P(B)=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\{1\},\emptyset),(\{1\},\{1\})\}$

<u>שאלה 2</u>: (14 נקודות) תהי $I \neq \emptyset$ קבוצה לא ריקה, ותהיינה $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$ משפחות של קבוצות.

הוכח או הפרך:

א) $\cup_{i\in I} (A_i \times B_i) \subseteq (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$.

ב) $\cup_{i\in I} (A_i \times B_i) \supseteq (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$.

<u>פתרון שאלה 2</u>:

א) נכון.

יהי (x,y) שרירותי. נניח ש $(x,y) \in \cup_{i\in I} (A_i \times B_i)$ ונוכיח ש $(x,y) \in (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$.

מכיון ש $(x,y) \in \cup_{i\in I} (A_i \times B_i)$, קיים $i_0 \in I$ כך ש $(x,y) \in A_{i_0} \times B_{i_0}$, ולכן $x \in A_{i_0}$ וגם $y \in B_{i_0}$.

מכיון ש $x \in A_{i_0}$ נקבל ש $x \in \cup_{i\in I} A_i$ ומכיון ש $y \in B_{i_0}$ נקבל ש $y \in \cup_{i\in I} B_i$,

לכן $(x,y) \in (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$.

ב) לא נכון. נראה דוגמה נגדית:

$$I = \{1,2\}, A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, B_1 = \{a\}, B_2 = \{b\}$$

אזי

$$(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i) = \{1,2\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$$

$$\cup_{i\in I} (A_i \times B_i) = \{(1,a)\} \cup \{(2,b)\} = \{(1,a),(2,b)\}$$

<u>שאלה 3</u>: (14 נקודות) תהיינה A, B קבוצות, ויהיו $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq B \times C$ יחסים.

הוכח או הפרך:

א) $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$.

ב) $(S \cap T) \circ R \supseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$.

הערה: מעברים שאינם גרירה דו כיוונית אלא גרירה חד כיוונית יש להוכיח באופן מלא.

<u>פתרון שאלה 3</u>:

א) נכון. יהי (a,c) זוג סדור שרירותי. נניח ש $(a,c) \in (S \cap T) \circ R$ ונוכיח ש $(a,c) \in (S \circ R) \cap (T \circ R)$.

$(a,c) \in (S \cap T) \circ R \Leftrightarrow$ הגדרת הרכבת יחסים

$\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \cap T\big) \Leftrightarrow$ הגדרת חיתוך

$\exists b \in B\Big((a,b) \in R \wedge \big((b,c) \in S \wedge (b,c) \in T\big)\Big) \Leftrightarrow$ אידמפוטנטיות

$\exists b \in B\Big(\big((a,b) \in R \wedge (a,b) \in R\big) \wedge \big((b,c) \in S \wedge (b,c) \in T\big)\Big) \Leftrightarrow$ אסוציאטיביות + קומוטטיביות

$\exists b \in B\Big(\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big) \wedge \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\big)\Big) \Rightarrow (\star)$

$\Big(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big)\Big) \wedge \Big(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\big)\Big) \Leftrightarrow$ הגדרת הרכבת יחסים

$(a,c) \in S \circ R \wedge (a,c) \in T \circ R \Leftrightarrow$ הגדרת חיתוך

$(a,c) \in (S \circ R) \cap (T \circ R)$

נוכיח את $(\star)$.

נגדיר את הפרדיקטים $P(b) = \big((a,b) \in R \land (b,c) \in S\big)$ ו $Q(b) = \big((a,b) \in R \land (b,c) \in T\big)$.

אנו רוצים להוכיח $\Big(\exists b \in B\big(P(b) \land Q(b)\big)\Big) \Rightarrow \Big(\big(\exists b \in B: P(b)\big) \land \big(\exists b \in B: Q(b)\big)\Big)$.

נניח $\exists b \in B\big(P(b) \land Q(b)\big)$.

מ ES קיים $b_0 \in B$ עבורו מתקיים $P(b_0) \land Q(b_0)$. מכלל הפישוט ניתן להסיק $P(b_0)$ ובנוסף $Q(b_0)$.

לפי EG מ $P(b_0)$ נובע $\exists b \in B: P(b)$ ובנוסף מ $Q(b_0)$ נובע $\exists b \in B: Q(b)$.

מכלל החיתוך נקבל $\big(\exists b \in B: P(b)\big) \land \big(\exists b \in B: Q(b)\big)$.

ב) לא נכון. נראה דוגמה נגדית:

נגדיר את הקבוצות $A = \{1\}, B = \{a,b\}, C = \{\beta\}$,

ואת היחסים $R = \{(1,a),(1,b)\}, S = \{(a,\beta)\}, T = \{(b,\beta)\}$.

כעת $S \cap T = \emptyset$ ולכן $(S \cap T) \circ R = \emptyset \circ R = \emptyset$.

מצד שני $S \circ R = \{(1,\beta)\}, T \circ R = \{(1,\beta)\}$, ולכן $(S \circ R) \cap (T \circ R) = \{(1,\beta)\}$.