תרגיל 3 - אי שיוויונים אי תלות ומשפטי גבול - תשע"ט

25 באפריל 2019

1. (שאלת חימום) חבר קרוב שלך התראיין בשבוע שעבר ב־4 מקומות עבודה. לדבריו, הוא יקבל הצעת עבודה מכל אחד מהחברות בו הוא התראיין בסיכוי של 20%. למרות זאת, מכיוון שהוא התראיין ל־ 4 חברות שונות, כך לטענתו, הוא בטוח ב־ 90% שהוא יקבל לפחות הצעת עבודה אחת. האם הוא צודק?

   (א) **<u>פתרון</u>**
   ברור שהוא טועה. נגדיר את המאורע A_i ־ החבר שלנו קיבל הצעת עבודה מהחברה ה־i. מתקיים:

   $$\mathbb{P}(\underset{i\in\{1,2,3,4\}}{\cup}A_i) \leq \sum_{i=1}^{4}\mathbb{P}(A_i) = 4\cdot 0.2 = 0.8 = 80\%$$

   לכן, הסיכוי לקבל לפחות הצעת עבודה אחת חסומה בהערכת סיכוי של 80%.

2. נתון המשתנה המקרי $X \sim Exponential(\lambda)$. הוכח:

   (א) $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{\lambda a}$

   i. **<u>פתרון</u>**

   $$X \sim Exponential(\lambda) \Longrightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \underset{\Longrightarrow}{Markov}\ \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a} = \frac{1}{\lambda a}$$

   ניתן לוודא את התוצאה לפי ההתפלגות שך המשתנה המקרי $\mathbb{P}(X \geq a) = e^{-\lambda a} \leq \frac{1}{\lambda a}$.

(ב) הראו $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq b)\leq \frac{1}{\lambda^2b^2}$ והכיחו $\mathbb{P}(X\in(\frac{1}{\lambda}-b,\frac{1}{\lambda}+b))\geq 1-\frac{1}{\lambda^2b^2}$.

i. **<u>פתרון</u>**

$$X\sim Exponential(\lambda)\Longrightarrow Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}\underset{\Longrightarrow}{Chebyshev}\,\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq b)\leq\frac{Var(X)}{b^2}=\frac{1}{\lambda^2b^2}$$

לכן, מתקיים:

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq b)\leq\frac{1}{\lambda^2b^2}\Longrightarrow 1-\mathbb{P}(|X-\frac{1}{\lambda}|<b)=$$

$$1-\mathbb{P}(|X-\frac{1}{\lambda}|<b)=1-\mathbb{P}(X\in(\frac{1}{\lambda}-b,\frac{1}{\lambda}+b))\leq\frac{1}{\lambda^2b^2}$$

$$\mathbb{P}(X\in(\frac{1}{\lambda}-b,\frac{1}{\lambda}+b))\geq 1-\frac{1}{\lambda^2b^2}$$

3. יהיו X ו־ Y משתנים מקריי המקיימים

$$\mathbb{E}(X)=1,Var(X)=4,\mathbb{E}(Y)=2,Var(Y)=1$$

אם $\mathbb{E}(XY)\in\mathbb{N}$ מצא את הערך המקסימלי האפשרי של $\mathbb{E}(XY)$ (רמז: השתמו במקדם המתאם של פירסון ובאישיוויון קושי שוורץ $|\mathbb{E}(XY)|^2\leq|\mathbb{E}(X^2)|\cdot|\mathbb{E}(Y^2)|$ ובתנאים הנדרשים הנגזרים מהם).

(א) **<u>פתרון</u>**
תחילה

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}\leq 1$$

לכן,

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\leq\sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

ואז

$$\mathbb{E}(XY)\leq\sqrt{Var(X)Var(Y)}+\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\sqrt{4\cdot 1}+2\cdot 1=4$$

נשים לב ש־ $\mathbb{E}(XY) = 4$ אפשרי אם נגדיר למשל

$$Y = \frac{1}{2} \cdot X + \frac{3}{2}$$

מאי־שיוויון קושי שוורץ נקבל:

$$|\mathbb{E}(XY)|^2 \leq |\mathbb{E}(X^2)| \cdot |\mathbb{E}(Y^2)| = 5 \cdot 5 = 25$$

נקבל $\mathbb{E}(XY) \leq 5$ אבל לפי הגדרת אי השיוויון $\mathbb{E}(XY) = 5$ אם ורק אם $Y = \alpha X$. אבל אז

$$2 = \mathbb{E}(Y) = \alpha \mathbb{E}(X) = \alpha$$

כלומר $X = Y$ וזה לא אפשרי כי השונות של שני המשתנים המקריים שונה.
לכן, התשובה היא 4.

4. מטרת התרגיל הבא הוא להוכיח את משפט הגבול המרכזי CLT באמצעות שימוש בפונקציה יוצרת מומנטים (ניתן באופן דומה להוכיח באמצעות הפונקציה האופיינית).

(א) יהיו $X_1, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים זהה כך ש־ $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ ו־ $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. ופונקציה יוצרת מומנטים $M_X(s) < \infty$ הסופית בקטע $[-c, c]$ עבור $c > 0$ קבוע.

(ב) נגדיר

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

אם נתון (מוזמנים להוכיח) כי לכל משתנה מקרי Y עם פונקציה יוצרת מומנטים מוגדרת היטב ו־

$$\mathbb{E}(Y) = 0$$

$$Var(Y) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} [M_Y(\frac{s}{\sqrt{n}})]^n = e^{\frac{s^2}{2}}$$

הוכח:

$$\forall_{s \in [-c,c]} \lim_{n \to \infty} M_{Z_n}(s) = e^{\frac{s^2}{2}}$$

פתרון

נגדיר משתנים מקריים מנורמלים $Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma}$. אזי הם מקיימים $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ ו־ $Var(Y_i) = 1$ בנוסף

$$Z_n = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{Y_1 + .. + Y_n}{\sqrt{n}}$$

אזי מתקיים (כי Y_i מתפלגים זהה ובלתי תלויים):

$$M_{Z_n}(s) = \mathbb{E}(e^{s\cdot\frac{Y_1+,,,+Y_n}{\sqrt{n}}}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(e^{\frac{s\cdot Y_i}{\sqrt{n}}}) = [M_{Y_i}(\frac{s}{\sqrt{n}})]^n$$

עתה, מתקיים מהנתון

$$\underset{n\to\infty}{lim} M_{Z_n}(s) = \underset{n\to\infty}{lim}[M_Y(\frac{s}{\sqrt{n}})]^n = e^{\frac{s^2}{2}}$$

מכיוון שמדובר בפונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי המתפלג $N(0,1)$ נסיק כי פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z_n מתכנסת למשתנה מקרי המתפלג נורמלית $N(0,1)$.

5. יהיו $x, y \in (0,1]$ ו־ $A \subseteq (0,1]$ נגדיר את הפעולה (חיבור מודולו 1):

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y & x+y \in (0,1] \\ x+y-1 & else \end{cases}$$

וכן,

$$A \oplus x = \{a \oplus x \,|\, a \in A\}$$

נגדיר

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}((0,1]) \,|\, A \oplus x \in \mathcal{B}((0,1]) \, and \, \forall_{x\in(0,1]}\mathbb{G}(A \oplus x) = \mathbb{G}(A)\}$$

כאשר $\mathbb{G}$ היא מידת לבג על $(0,1]$. הוכח: $\mathcal{L}$ מהווה מערכת λ.

(א) **פתרון**

i. מתקיים $\Omega \oplus x = \Omega \in \mathcal{L}$.

ii. יהיו $A,B\in\mathcal{L}$ כך ש־ $A\subseteq B$. מתקיים

$$\mathbb{G}(A\oplus x)=\mathbb{G}(A)$$

ו־

$$\mathbb{G}(B\oplus x)=\mathbb{G}(B)$$

נבקש להראות כי $B\backslash A\in\mathcal{L}$. מהגדרת הפעולה $\oplus$ מתקיים $A\subseteq B\Longrightarrow A\oplus x\subseteq B\oplus x$ וגם

$$(B\oplus x)\backslash(A\oplus x)=(B\backslash A)\oplus x$$

ולכן מכיוון ש־ $(B\backslash A)\oplus x\in\mathcal{B}((0,1])$ ומכיוון ש־ $\mathbb{G}=\mathbb{P}$ מידת הסתברות (יש יחידה כזאת). נובע:

$$\mathbb{G}(B\backslash A)=\mathbb{P}(B\backslash A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B\oplus x)-\mathbb{P}(A\oplus x)=$$

$$\mathbb{P}((B\oplus x)\backslash(A\oplus x))=\mathbb{P}((B\backslash A)\oplus x)\Longrightarrow B\backslash A\in\mathcal{L}$$

iii. יהיו $A_1,A_2,...\in\mathcal{L}$ ו־ $A_n\subseteq A_{n+1}$ ($n\in\mathbb{N}$) מטיעונים דומים ל־ ii מתקיים $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{L}$.