השלמות לתירגול- בסיס נורמלי, הרחבות ציקליות

להלן תיקונים והשלמות לתירגול. כולל תיקון חשוב!!

1. בסיס נורמלי ל $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ ניתן ליצור למשל מ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

2. הוכחה לגירסא האדיטיבית של הילברט 90: נניח K/F הרחבה ציקלית מסדר n עם יוצר σ. ויהי איבר a כך ש $Tr(a)=0$, אזי קיים איבר $b\in K$ כך ש $a=\sigma(b)-b$.

נקח בסיס נורמלי להרחבה $\{\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\ldots,\sigma^n(\alpha)\}$. נשים לב שבהכרח $Tr(\alpha)\neq 0$ אחרת זה צירוף לינארי לא טריוויאלי של אברי הבסיס שמתאפס.
כעת נרשום $a=\alpha_1\sigma(\alpha)+\alpha_2\sigma^2(\alpha)+\cdots+\alpha_n\sigma^n(\alpha)$. לפי הנתון על העיקבה:

$$0=Tr(a)=\sum\alpha_i Tr\left(\sigma^i(\alpha)\right)=\sum\alpha_i Tr(\alpha)=Tr(\alpha)\sum\alpha_i$$

(שימו לב ש $Tr(\sigma(\alpha))=Tr(\alpha)$ תמיד.)
ונקבל ש- $\sum\alpha_i=0$ (זה ישמש אותנו אח"כ).
כעת נחפש $b=\beta_1\sigma(\alpha)+\beta_2\sigma^2(\alpha)+\cdots+\beta_n\sigma^n(\alpha)$ מתאים.

$$\sigma(b)=\beta_1\sigma^2(\alpha)+\beta_2\sigma^3(\alpha)+\cdots+\beta_{n-1}\sigma^n(\alpha)+\beta_n\sigma(\alpha)$$
$$\sigma(b)-b=(\beta_n-\beta_1)\sigma(\alpha)+(\beta_1-\beta_2)\sigma^2(\alpha)+\cdots+(\beta_{n-1}-\beta_n)\sigma^n(\alpha)$$

ע"י השוואת מקדמים עם a נקבל את התנאים $\alpha_1=\beta_n-\beta_1,\ \alpha_2=\beta_1-\beta_2,\ \ldots,\alpha_n=\beta_{n-1}-\beta_n$ ובמטריצה:
$$\left(\begin{array}{cccccc} -1 & & & & 1 & \alpha_1\\ 1 & -1 & & & & \alpha_2\\ & 1 & -1 & & & \alpha_3\\ & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & -1 & \alpha_n \end{array}\right).$$

נוכל לדרג (למשל לסכום את כל השורות לשורה העליונה) ולראות שיש פתרון (אין שורת סתירה... זוכרים?) אם ורק אם $\sum \alpha_i = 0$.
מי שמעוניין גם יכול להסתכל בפתרון עצמו ולבדוק שזה אכן עובד:

$$b = -\alpha_1 \sigma(\alpha) - (\alpha_1 + \alpha_2)\sigma^2(\alpha) - \cdots - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})\sigma^{n-1}(\alpha)$$

.

3. בתירגול רשמתי רדיקלית $\Leftarrow$ציקלית. לאחר מכן עידכנו אותי (שון?) שההגדרה שלכם בהרצאה להרחבה רדיקלית היא כל הרחבה מהצורה $F[\sqrt[n]{a}]$. במקרה כזה הטענה הנ"ל **לא** נכונה!!
המקרה עליו חשבתי הוא כאשר ההרחבה היא רדיקלית **וגלואה** (שזה אכן מבטיח צקליות).