תרגיל 2- פתרון

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]^2$. תהי B קבוצת כל ה x-ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.

ב. אם $m(A_n)>\delta>0$ לכל n, הראו כי $m(B)>\delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(B)=0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ אבל $m(B)=0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x-ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1\subseteq E_2\subseteq\dots$ וגם מתקיים כי $m(E_1)\le 1$ שכן $E_1\subseteq[0,1]^2$. לכן, כמו בהוכחה בשאלה 3 בתרגיל 3:

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}m(A_k)\ge\delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ נובע כי $\lim_{n\to\infty}m(A_n)=0$. מהסעיף הקודם נובע כי $m(B)\le\lim_{k\to\infty}m(A_k)$ ומכאן ש $m(B)=0$.

ד. ניקח את $A_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}},\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^2$. קל לראות כי $m(A_n)=\frac{1}{(n+1)}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$. מצד שני $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n=A_k$ ולכן

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=m\left(\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)=0$$

2. יהי $\varepsilon>0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב $\mathbb{R}^2$. הוכח כי אם מתקיים

$$m(A\cap P)\le(1-\varepsilon)m(P)$$

לכל מלבן P אזי $m(A)=0$.

פתרון:

נניח תחילה כי $m(A)<\infty$. אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית m^* (שמסכימה עם m לכל קבוצה מדידה), לכל $n>0$ קיימת קבוצה $O_{1/n}$ שהיא איחוד זר ב"מ של קבוצות אלמנטריות כך ש $A\subset O_{1/n}$ ו $m^*\left(O_{1/n}\right)-\frac{1}{n}<m^*(A)$. ניתן לרשום $O_{1/n}=\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k$ כאשר P_k מלבנים זרים ופתוחים.

נקבל כי

$$m\left(O_{1/n}\right)-\tfrac{1}{n}<m(A)=m\left(A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap P_k)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}m\left(A\cap P_k\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon)m\left(P_k\right)=(1-\varepsilon)m\left(O_{1/n}\right)$$

וזאת לכל $n>0$. מכאן נובע כי $m\left(\bigcap O_{1/n}\right)=0$ ולכן גם $m(A)=0$.

עבור המקרה בו $m(A)=\infty$ נסתכל על $A_{ij}=A\cap[i-1,i]\times[j-1,j]$ עבור $i,j\in\mathbb{Z}$. ברור כי מתקיים

$$m\left(A_{ij}\cap P\right)\le m\left(A\cap P\right)\le(1-\varepsilon)m(P)$$

לכל מלבן P. עפ"י המקרה הקודם נובע כי $m\left(A_{ij}\right)=0$. מכאן ש

$$m(A)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap[i-1,i]\times[j-1,j]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m\left(A_{ij}\right)=0$$

מש"ל

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב $\mathbb{R}$ ו

$$B=\bigcup_{x\in A}[x-1,x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

פתרון:

i. $\bigcup_{x\in A}(x-1,x+1)$ הינה קבוצה מדידה שכן היא פתוחה.

ii. בנוסף, לכל $c\in\mathbb{R}$, הקבוצה $A+c=\{a+c : a\in A\}$ מדידה כהזזה של קבוצה מדידה.

iii. נשים לב ש: $B=\big((A-1)\cup(A+1)\big)\cup\bigcup_{x\in A}(x-1,x+1)$ ולכן, לפי הסעיפים הקודמים, B מדידה כאיחוד סופי של מדידות.

4) תהיינה $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונ' רציפות וגזירות ברציפות.
הוכיחו כי מידת לבג (הדו-ממדית) של העקומה החלקה:

$$A:=\{(f(x),g(x)) \mid x\in[0,1]\}$$ היא אפס.

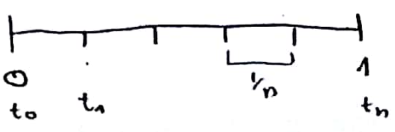
<u>פתרון:</u>

f, g רציפות וגזירות ברציפות בקטע סגור ולכן קיימים קבועים ("קבועי ליפשיץ") : C_f , C_g , כך ש:

$$\forall t_1,t_2\in[0,1] : \quad |f(t_2)-f(t_1)|\le C_f|t_2-t_1|$$
$$|g(t_2)-g(t_1)|\le C_g|t_2-t_1|$$

נגדיר: $C:=C_f\cdot C_g$.

לכל $n\in\mathbb{N}$, נחלק את הקטע $[0,1]$ ל n קטעים
באורך $\frac{1}{n}$ כל אחד:



$t_0=0,\quad t_{j+1}=t_j+\frac{1}{n} \qquad 0\le j\le n-1$

אזי : עבור $0 \le j \le n-1$:

לכל $t_j \le x,y \le t_{j+1}$

מתקיים
$$|f(y)-f(x)| \le C_f\,(t_{j+1}-t_j) = \frac{C_f}{n}$$
$$|g(y)-g(x)| \le C_g\,(t_{j+1}-t_j) = \frac{C_g}{n}$$

ולכן :
$$\sup\{\,|f(y)-f(x)| \mid t_j \le x,y \le t_{j+1}\} \le \frac{C_f}{n}$$
$$\sup\{\,|g(y)-g(x)| \mid t_j \le x,y \le t_{j+1}\} \le \frac{C_g}{n}$$

ולכן, לכל n ולכל $0 \le j \le n-1$, ניתן לכסות את קטע העקומה :
$$A_{nj} = \{(f(x),g(x)) \mid t_j \le x \le t_{j+1}\}$$

ע"י מלבן עם רוחב $\frac{C_f}{n}$ ואורך $\frac{C_g}{n}$

ומסמן C :
$$m^*(A_{nj}) \le \frac{C}{n^2}$$

ומכיון ש m^* תת אדטיבית ו- $A = \bigcup_{j=0}^{n-1} A_{nj}$

נקבל :
$$\forall n \quad 0 \le m^*(A) \le \sum_{j=0}^{n-1} m^*(A_{nj}) \le n \cdot \frac{C}{n^2}$$

נשאיף n ל ∞ ונקבל : $m^*(A) = 0$

בפרט A מדידה (כי כל קבוצה עם מידה חיצונית אפס היא מדידה לבג).

ולכן $m(A) = 0$.

5. נניח ו $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X,S) ו $\mu_n(A)\uparrow$ לכל $A\in S$ אזי $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון:

ברור כי $\mu(A)\geq 0$ לכל $A\in S$ וכי $0=\mu(\varnothing)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(\varnothing)$. נראה כי גם התכונה השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\mu_j\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_j(A_n)$$

נסמן את הסכומים החלקיים $c_{ij}=\sum_{n=1}^{i}\mu_j(A_n)$. מתקיים

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_j(A_n)=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}c_{ij}=\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{i\in\mathbb{N}}c_{ij}$$

$$=\sup_{i,j\in\mathbb{N}}c_{ij}=\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}c_{ij}=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}c_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{j\to\infty}\mu_j(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$