מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 4 - פתרון

1. יהיו X,Y קבוצות ו- $f: X \to Y$ העתקה.
<u>א' הוכיחו:</u> אם T_{disc} טופולוגיה דיסקרטית על X ו-Q טופולוגיה כלשהי על Y אז $f: (X, T_{disc}) \to (Y, Q)$ רציפה.

<u>הוכחה.</u>
נוכיח שתמונה הפוכה של תמונה פתוחה היא תמונה פתוחה.
תהי $U \in Q$. אזי $f^{-1}(U) \subseteq X$. לכן $f^{-1}(U) \in T_{disc}$. הטופולוגיה הדיסקרטיט מכילה את כל תת הקבוצות של X. לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה, מש"ל.

<u>ב' הוכיחו</u> אם T טופולוגיה כלשהי על X ו-Q_{triv} טופולוגיה טריוויאלית על Y אז $f: (X, T) \to (Y, Q_{triv})$ רציפה.

<u>הוכחה.</u>
נוכיח שתמונה הפוכה של תמונה פתוחה היא תמונה פתוחה.
תהי $U \in Q_{triv}$. אזי $U = \emptyset$ או $Y = U$.
אם $U = \emptyset$ אז $f^{-1}(U) = \emptyset$ לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.
אם $U = Y$ אז $f^{-1}(U) = X$ לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.
אז אם U, $f^{-1}(U)$ פתוחה. לכן f רציפה, מש"ל.

<u>ג'</u> יהיו T_1, T_2 שתי טופולוגיות על X כך ש- $T_1 \subseteq T_2$
ויהיו Q_1, Q_2 שתי טופולוגיות על Y כך ש-$Q_1 \subseteq Q_2$.
<u>הוכיחו:</u> אם $f: (X, T_1) \to (Y, Q_2)$ רציפה אז גם $f: (X, T_2) \to (Y, Q_1)$ רציפה.

<u>הוכחה.</u>
יהי: $B \subseteq Y$ ו-$B \in Q_1$. אזי $B \in Q_2$ ולפי הגדרת הרציפות $f^{-1}(B) \in T_1$. אז לפי התנאים $f^{-1}(B) \in T_2$. ולפי הגדרת הרציפות $f: (X, T_2) \to (Y, Q_1)$ רציפה.

2. יהיו M_1, M_2 שני מרחבים מטריים כך ש- $M_2 \cong M_1$ כמרחבים טופולוגיים .
הוכיחו ש-M_1 קומפקטי אם"ם M_2 קומפקטי.

הוכחה.
יהי $f: M_1 \to M_2$ הומאורפיזם .
כיוון 1.
יהי M_1 קומפקטי , נוכיח ש- קומפקטי.
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של M_2 אזי
$\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של M_1 כי f העתקת על. חוץ הזה $f^{-1}(U_\alpha)$ פתוחה לכל $\alpha \in I$ כי f רציפה. ז"א, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ פתוח של M_1. כיוון ש-M_1 קומפקתי הכיסוכ מיכל תת כיסוי סופי, כלומר קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ כך ש-

$$\cup_{i=1}^n f^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right) = M_1$$

כיוון ש- f חח"ע ועל מקבלים באגף שמאל:

$$f\left(\cup_{i=1}^n f^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right)\right) = \cup_{i=1}^n f \circ f^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right) = \cup_{i=1}^n Id_Y\left(U_{\alpha_i}\right) = \cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

ובאגף ימין: $f(M_1) = M_2$. אז $\cup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = M_2$, ז"א, $\left\{U_{\alpha_i}\right\}_{1\le i\le n}$ תת כיסוי סופי ו- M_2 קומפקטי.

כיוון 2.
אם ניתן ש-M_2 קומפקטי, אפשר לקבל הוכחת קומפקטיות של M_1 אם להחליף בפרק הקודם M_1 ל-M_2, M_2 ל- M_1 , f ל-f^{-1} ו- f^{-1} ל-f.

3. הוכיחו תכונות בסיסיות של סגור ופנים
(אפילו אם חלקן הוכח בהרצאה):
(a) $A \subseteq \bar{A}$
(b) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
(c) $\bar{A}$ קבוצה סגורה
(d) אם F קבוצה סגורה ו-$A \subseteq F$ אזי $\bar{A} \subseteq F$
(e) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

(f) A סגורה $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

(g) נקודה p שייכת ל- $\bar{A} \Leftrightarrow$ כל סביבה של p נחתכת עם A.

(h) A° קבוצה פתוחה.

(i) A° היא קבוצה של כל הנקודות הפנימיות ב-A.

(j) אם U קבוצה פתוחה ו-$U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^\circ$

(רמז: סדר נכון של הוכחת הסעיפים יקל את העבודה)

<u>הוכחה</u>

<u>תזכורת הגדרה.</u> יהי X מ"ט. הקבוצה

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A, \\ \text{סגורה}-F}} F$$

נקראת *סגור של* A.

(c) $\bar{A}$ -סגורה כחיתוך סגורות.

(a) כל איברי החיתוך מכילים A . אז גם החיתוך עצמו מכיל A.

(d) F אחד מאיברי החיתוך $\bar{A}$ ולכן מכיל אותו.

(b) יהי $A \subseteq B$. (a) גורר $A \subseteq \bar{B}$. $\bar{B}$ סגורה לפי (c).

ולכן $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ לפי (d).

(f) $A \Leftarrow \bar{A} = A$ סגורה לפי (c).

$A \subseteq A$, A סגורה $\Leftarrow$ $\bar{A} \subseteq A$, לפי (d) $A \subseteq \bar{A}$, לפי (a).

ו-(f,c) גוררים (e) .

(g) <u>$\Leftarrow$</u> נניח $p \in \bar{A}$ ו-(בדרך השלילה) קיימת <u>סביבה U של p</u> כך

ש- $U \cap A = \emptyset$. אזי U^c סגורה ו- $A \subseteq U^c$. אז לפי *(d)* $\bar{A} \subseteq U^c$

ולכן- $p \in U^c$. <u>סתירה</u>.

<u>$\Rightarrow$</u>נניח כל סביבה של p נחתכת עם A ו-(בדרך השלילה)

$p \notin \bar{A}$. אזי לפי (c) $\bar{A}$ קבוצה סגורה ולכן $(\bar{A})^c$

פתוחה . מכיוון ש- $p \in (\bar{A})^c$ $(\bar{A})^c$ אמורה להיחתך

עם A, אבל זה לא יכול להיות כי $(\bar{A})^c \subseteq A^c$ לפי "a". <u>סתירה</u>.

(h) A° קבוצה פתוחה כאחוד הפתוחות.

(i) אם $p \in A^\circ$ אז לפי הגדרה $A \subseteq A^\circ$ ו-$p \in A$. אבל לפי (h) A° פתוחה, אזי p נקודה פנימית ב-A .

הפוך: אם p נקודה פנימית ב-Aת אזי קיימת קבוצה U פתוחה כך ש-$p \in U \subseteq A$. לכן $p \in A^\circ$ לפי הגדרת הפנים.

(j) אם U קבוצה פתוחה ו-$U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^\circ$ כי A° איחוד של כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב-A (הגדרת הפנים).

4. תהי A תת-קבוצה במרחב טופולוגי.

א) תוכיחו: $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

הוכחה:

$$(A^\circ)^c = \left(\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U-\text{פתוחה}}} U \right)^c = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ U-\text{פתוחה}}} U^c$$

כיוון ש-U פתוחה ומוכלת ב-A, U^c–סגורה ומכילת את A^c.
אבל (זה חשוב מאוד) כל קבוצה סגור המכילה את A^c היא משלים של איזושהי קבוצה פתוחה המוכלת ב-A . לכן באגף הימין נמצאות כל הקבוצות הסגורות המכילות את A^c. ומכך מייד נובע לפי הגדרת הסגור, שאגף הימין שווה ל-$\overline{A^c}$, מש"ל.

ב) תוכיחו ש- $\bar{A} - A^\circ$ קבוצה סגורה.

הוכחה

$$\bar{A} - A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$$

A° - פתוחה , לכן $(A^\circ)^c$ – סגורה . כיוון ש-$\bar{A}$ – סגורה,
$\bar{A} - A^\circ$ – סגורה כחתוך של שתי קבוצות סגורות, מש"ל.

5. תהי $f: X \to Y$ הומאומורפיזם. תכיחו:

א) $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

ב) $f(A^\circ) = \big(f(A)\big)^\circ$

<u>הוכחה</u>

כיוון ש-f הומאומורפיזם , ז"א, העתקה חח"ע, על, פתוחה וסגורה:

א' $F \subseteq X$ סגורה ב-X ומכילה את A אם"ם $f(F) \subseteq Y$ סגורה ב-Y ומכילה את $f(A)$. לכן:

$$f(\bar{A}) = f\left(\bigcap_{\substack{F\supseteq A \\ \text{סגורה}-F}} F\right) = \bigcap_{\substack{F\supseteq A \\ \text{סגורה}-F}} f(F) = \overline{f(A)}$$

ב' $U \subseteq X$ פתוחה ב-X ומכולת ב-A אם"ם $f(U) \subseteq Y$ פתוחה ב-Y ומכולת ב-$f(A)$. לכן:

$$f(A^\circ) = f\left(\bigcup_{\substack{U\subseteq A \\ \text{פתוחה } -U}} U\right) = \bigcup_{\substack{U\subseteq A \\ \text{פתוחה } -U}} f(U) = \left(f(A)\right)^\circ$$