פתרון תרגיל בית מספר 2

שאלה 1

א) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right)$ לא קיים ולכן גם לסדרה המבוקשת לא קיים גבול. נראה ש $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right)$ לא קיים. אמנם עבור $n=7k$ נקבל $\lim\limits_{k\to\infty}\left(7k-7\left[\frac{7k}{7}\right]\right)=\lim\limits_{k\to\infty}(7k-7k)=0$.

עבור $n=7k+1$ נקבל

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(7k+1-7\left[\frac{7k+1}{7}\right]\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(7k+1-7\left[k+\frac{1}{7}\right]\right)=\lim\limits_{k\to\infty}(7k+1-7k)=1$ ומצאנו 2 גבולות חלקיים שונים לסדרה ולכן לא קיים גבול.

ב) נבדוק התכנסות רכיב רכיב. ברכיב הראשון $\frac{1}{n}\to 0$, סינוס רציפה באפס ולכן לפי אינפי' אחד הגבול כולו הינו אפס. ברכיב השני, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2}\to\frac{1}{2}$ ולפי מבחן דלאמבר (מבחן המנה) הטור מתכנס, ולכן האיבר הכללי שלו (הסדרה הנתונה) שואף לאפס. לכן סה"כ גבול הסדרה הינו $(0,0)$.

שאלה 2

א) $0\le\frac{x^2}{|x|+|y|}\le\frac{x^2}{|x|}=|x|\to 0$, $\cos\left(y^2\right)$ חסום ולכן כמו באינפי' 1 קל להראות שהגבול הינו אפס (משפט הסנדוויץ').

ב) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2}$ לא קיים. נראה עפ"י מסלולים :

א) $x=0, y\to 0$: נקבל $\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to0}}\frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y^2}{y^2}=1$

ב) $y=0, x\to 0$: $\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}}\frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

קיבלנו גבולות שונים עפ"י מסלולים שונים ולכן הגבול המבוקש לא קיים.

ג) $\lim_{\substack{x\to2\\y\to1}}\frac{\arcsin(xy-2)}{arctg(3xy-6)}=\lim_{\substack{x\to2\\y\to1}}\frac{\arcsin(xy-2)}{arctg(3(xy-2))}$

נציב $t=xy-2$ ונקבל כי הגבול שווה ל- $\lim_{t\to0}\frac{\arcsin t}{arctg(3t)}$ קיבלנו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ עפ"י לופיטל

נקבל $\frac{1}{3}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{3}{1+(3t)^2}}$.

ד) נפריך את קיום הגבול על ידי מסלולים שונים : $x=ky$, $y\to0$ נותן גבול $\frac{ky^2}{k^2y^2+y^2}=\frac{k}{k^2+1}$. ברור שעבור ערכים שונים של הקבוע k נקבל גבולות שונים. לכן לא יכול להיות גבול.

<u>שאלה 3</u>

א) $f(x,y)=x\ln\left(x^2+3y^2\right)$

$\left|f(x,y)\right|=|x|\left|\ln\left(x^2+3y^2\right)\right|\le|x|\left|\ln\left(x^2\right)\right|\to0$ לפי לופיטל. אי השיוויון נכון עבור x,y קטנים מספיק כך ש $x^2+3y^2<1$ ואז הלוגריתם הופך לשלילי. לכן לפי הסנדוויץ הגבול הינו 0 ואם נגדיר את הפונקציה בנקודה להיות $f(0,0)=0$ היא תהיה רציפה.

דרך נוספת לפתור את התרגיל: נסמן $r^2=x^2+3y^2$. מתקיים $x^2\le r^2$ ולכן $|x|\le r$. כעת אפשר לחסום את הפונקציה באופן הבא: $0\le|x|\left|\ln\left(x^2+3y^2\right)\right|\le r\left|\ln\left(r^2\right)\right|$. לפי להופיטל מחשבים את הגבול של הביטוי מימין, ואז לפי משפט הסנדוויץ' מקבלים את הדרוש.

ב) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$

ניקח מסלולים $y=kx,x\to0$ לקבל $f(x,kx)=\frac{k+1}{k-1}$ וברור שעבור ערכים שונים של k נקבל גבולות שונים ולכן אין גבול בנקודה, ולכן אין דרך להגדיר את הפונקציה בנקודה כך שהיא תהיה רציפה.

<u>שאלה 4</u>

נזיז את הפונקציה לצורך נוחות החישוב, $g(x,y)=f(x+1,y+2)=\frac{xy}{x^2+\sin^2 y}$ ונסתכל על הגבול

בראשית $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. נסתכל על המסלול $x=y\to 0$ לקבל $\frac{x^2}{x^2+\sin^2 x}=\frac{1}{\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2}}\to\frac{1}{2}$.

אבל עבור המסלול $y=0, x\to 0$ הגבול הוא אפס. לכן סה"כ אין גבול ולכן הפונקציה אינה רציפה (שימו לב שיכלנו לעצור ברגע שראינו שיש מסלול עם גבול שונה מאפס).

<u>שאלה 5</u>

נניח ש $f(x,y)$ רציפה ב-(x_0,y_0), לכן מתקיים $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ ולכן הגבול תחת כל מסלול שווה ל $f(x_0,y_0)$. בפרט עבור המסלול $x=x_0, y\to y_0$ כלומר $\lim_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$

ובאופן דומה עבור $\lim_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$.

דוגמא נגדית: $f(x,y)=\begin{cases}\left|\frac{x+y}{x-y}\right| & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\lim_{x\to 0} f(x,0)=\left|\frac{x}{x}\right|=1$, $\lim_{y\to 0} f(0,y)=\left|\frac{y}{-y}\right|=1$

לכן יש רציפות בנקודות, אבל כפי שראינו תחת המסלולים $y=kx$ מקבלים גבולות שונים.