<u>**פתרון תרגיל בית 3– חדווא 1**</u>

<u>**שאלה 1**</u>

בדוק את המונוטוניות של הסדרות הבאות:

א. $a_n = \frac{2^n}{n}$.   ב. $a_n = -n^2 + 7n$.   ג. $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.   ד. $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$.

<u>**פתרון שאלה 1**</u>

<u>**סעיף א**</u>

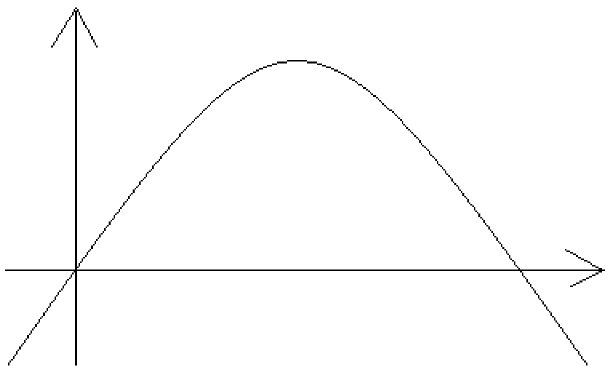
נראה ש $a_{n+1} - a_n > 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{2n\cdot 2^n - n\cdot 2^n - 2^n}{n(n+1)} = \frac{n\cdot 2^n - 2^n}{n(n+1)} = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}.$$

לכל $1 < n$ מתקיים $\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} > 0$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה ממש.

<u>**סעיף ב**</u>

נשרטט את הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x$.



הפרבולה יורדת לכל $x \le 4$ ולכן הסדרה $a_n = -n^2 + 7n$ יורדת לכל $n \le 4$ ז"א הסדרה מונוטונית יורדת ממש.

<u>**סעיף ג**</u>

האיברים במקומות הזוגיים גדולים מהאיברים במקומות האי זוגיים ולכן הסדרה לא עולה ולא יורדת.

<u>**סעיף ד**</u>

הסדרה היא סדרה חיובית

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}}\cdot\frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \frac{4n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{e^2} < 1$$ ולכן

הסדרה מונוטונית יורדת ממש.

<u>**שאלה 2**</u>

תוך שימוש בהגדרת הגבול הוכח את הטענות הבאות:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = 2$.   ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$.

<u>**פתרון שאלה 2**</u>

<u>**סעיף א**</u>

$$\left|\frac{2n+3}{n} - 2\right| = \left|\frac{3}{n}\right| = \frac{3}{n}.$$

לכל $0<\varepsilon$ נבחר $n_0=\left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil$ ונקבל שלכל $n_0<n$ $|a_n-2|<\varepsilon$.

<u>סעיף ב</u>

$$\left|\frac{n}{n^3+1}\right| \le \left|\frac{n}{n^3}\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| \le \left|\frac{1}{n}\right|.$$

לכל $0<\varepsilon$ נבחר $n_0=\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ ונקבל שלכל $n_0<n$ $|a_n|<\varepsilon$.

<u>שאלה 3</u>

חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-2n-1}$. ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^4-5}$. ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$.

ד. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right)$. ה. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+1}}{n^{\frac{7}{3}}-n^2}$

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

$$\frac{2n^2+n+1}{3n^2-2n-1}=\frac{\frac{2n^2+n+1}{n^2}}{\frac{3n^2-2n-1}{n^2}}=\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{3-0-0}=\frac{2}{3}.$$

<u>סעיף ב</u>

$$\frac{n^3-1}{n^4-5}=\frac{\frac{n^3-1}{n^4}}{\frac{n^4-5}{n^4}}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}}{1-\frac{5}{n^4}}.$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל ש $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}}{1-\frac{5}{n^4}}=\frac{0-0}{1-0}=0$.

<u>סעיף ג</u>

$$\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}=\frac{\sqrt{n+2}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n}=\sqrt{\frac{n+2}{n^2}}-\sqrt{\frac{n+1}{n^2}}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל ש

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\sqrt{0+0}-\sqrt{0+0}=0.$$

סעיף ד

$$\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}=\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}=\frac{n^2+3n-n^2-n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\frac{2n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}=\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{n}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{n^2+3n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$.\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

סעיף ה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+1}}{n^{\frac{7}{3}}-n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+1}}{n^{\frac{7}{3}}-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+1}}{n^{\frac{7}{3}}}}{\frac{n^{\frac{7}{3}}-n^2}{n^{\frac{7}{3}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^5}+\frac{2}{n^6}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}}}{1-\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}=0$$

שאלה 4

חשב את הגבולות הבאים בעזרת משפט שטולץ:

א. $.\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ ב. $.\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$

פתרון שאלה 5

סעיף א

נסמן $a_n=\ln(n),b_n=n$. הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה ממש ואינה חסומה ולכן ניתן להשתמש במשפט שטולץ.

$$.\ a_{n+1}-a_n=\ln(n+1)-\ln n,b_{n+1}-b_n=1$$

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{1}=0$$

סעיף ב

נסמן $a_n=1^3+2^3+\ldots+n^3,b_n=n^4$. הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה ממש ואינה חסומה ולכן ניתן להשתמש במשפט שטולץ.

$$a_{n+1}-a_n=1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3-\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)=(n+1)^3$$

$$.\ b_{n+1}-b_n=(n+1)^4-n^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{4n^3+6n^2+4n+1}=\frac{1}{4}$$

שאלה 5

חשב את הגבולות הבאים בעזרת המשפט:

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים. אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אזי הסדרה $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת

ומתקיים השוויון $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$. ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$. ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

נסמן $a_n=n!$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

<u>סעיף ב</u>

נסמן $a_n=\binom{2n}{n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\binom{2n+1}{n+1}:\binom{2n}{n}=\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}:\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(2n)!\cdot(2n+1)}{n!n!(n+1)}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}=\frac{2n+1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2.$$

<u>סעיף ג</u>

נסמן $a_n=n$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

<u>שאלה 6</u>

חשב את הגבולות הבאים בעזרת השימוש בגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}$. ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+9}{n}}$

<u>פתרון שאלה 6</u>

<u>סעיף א</u>

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}=\left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{3n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}e^{3n}=\infty.$$

<u>סעיף ב</u>

$$\left(1-\frac{2n}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+9}{n}} = \left(\left(1-\frac{1}{{n^2+5}/{2n}}\right)^{{n^2+5}/{2n}}\right)^{{2n}/{n^2+5}\,.\,{n^2+9}/{n}} = \left(\left(1-\frac{1}{{n^2+5}/{2n}}\right)^{{n^2+5}/{2n}}\right)^{{2n^3+18n}/{n^3+5n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+9}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{{n^2+5}/{2n}}\right)^{{n^2+5}/{2n}}\right)^{{2n^3+18n}/{n^3+5n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{{2n^3+18n}/{n^3+5n}} = \frac{1}{e^2}$$

בהצלחה!!!