בס"ד

לינארית 2 - תרגול 2 (העתקות לינאריות)

הגדרה: יהיו V, W מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$

$T: V \to W$ נקראת "העתקה לינארית"/"טרנספורמציה לינארית" אם מתקיימות

התכונות: 1. לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

2. לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

[קריטריון מקוצר: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים
$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$]

דוג: ① האם $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y) = (xy, x^2+y^2)$
היא העל?

פתרון: לא, כי 2 לא מתקיים, נדוג, $v = (1,2)$, $\alpha = 3$

$$T(\alpha v) = T(3(1,2)) = T(3,6) = (18,45)$$
$$\neq$$
$$\alpha T(v) = 3T(1,2) = 3(2,5) = (6,15)$$

② האם $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ x-y-z \end{pmatrix}$ היא העל?

פתרון: לא, תכונה 1 לא תמיד מתקיימת לדוג: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T(v_1+v_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\neq$$
$$T(v_1) + T(v_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הערה: לכל הע"ל $T(0) = 0$

הוכחה:
$$T(\overset{0}{0+0}) = T(0) + T(0)$$
$$\to T(0) = T(0) + T(0)$$
$$\to T(0) = 0$$

מסקנה: $T(0) \neq 0 \Longrightarrow T$ לא הע"ל

(3) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$ האם הע"ל?

פתרון: כן, נוכיח T הע"ל:

(I) יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$ ונוכיח $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$:

$$T(v_1+v_2) = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2-z_1-z_2 \end{pmatrix}$$

$\parallel \checkmark$

$$T(v_1)+T(v_2) = \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ x_1-y_1-z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2 \\ x_2-y_2-z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2+z_1-z_2 \end{pmatrix}$$

(II) ניקח $\mathbb{R}^3 \ni v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ונוכיח $T(\alpha v) = \alpha T(v)$:

$$T(\alpha v) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y + \alpha z \\ \alpha x - \alpha y - \alpha z \end{pmatrix}$$

$\parallel \checkmark$

$$\alpha T(v) = \alpha \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y + \alpha z \\ \alpha x - \alpha y - \alpha z \end{pmatrix}$$

[redacted]

(4) $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ המוגדרת ע"י $T(v) = Av$ כאשר A מטריצה $m \times n$

פתרון: נוכיח שזו אכן הע"ל:

(I) ניקח $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^n$ ונוכיח $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$$T(v_1+v_2) = A(v_1+v_2) = Av_1 + Av_2$$

$$T(v_1) + T(v_2) = Av_1 + Av_2 \quad \parallel \checkmark$$

(II) ניקח $v \in \mathbb{F}^n$, $\alpha \in \mathbb{F}$

$$T(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha A v$$

$$\alpha T(v) = \alpha A v \quad \parallel \checkmark$$

בס"ד

תזכורת:

$tr(A) = trace(A)$ = סכום איברי האלכסון

5) המוגדרת ע"י $T: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$, $T(A) = tr(A)$

נוכיח T העל:

I) ניקח $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ונוכיח: $T(A+B) = T(A)+T(B)$

$$T(A+B) = tr(A+B) \underset{\text{למדנו סמס שעבר}}{=} trA + trB = T(A) + T(B)$$

II) ניקח $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$T(\alpha A) = tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$$

$$\alpha T(A) = \alpha\, tr(A) \checkmark$$

תזכורת: תכונות העקבה:

1. $tr(A+B) = trA + trB$
2. $tr(\alpha A) = \alpha\, trA$
3. $tr(AB) = (trA)(trB)$

— מההגדרה של העל נובעים מספר הדברים הבאים:

1. $T(-V) = -T(V)$
2. $T(V_1 - V_2) = T(V_1) - T(V_2)$

סימון: $Hom(V, W)$ = {אוסף כל ההעל מ- V ל- W} כאשר V, W הם מ"ו.

לכל פונקציה

עובדות: תהיינה $f: A \to B$, $g: A \to B$ אז:

1. אם $g \circ f = id_A$ אז f חח"ע ו- g על
2. אם $f \circ g = id_B$ אז g חח"ע ו- f על
3. אם $f \circ g = Id_B$ וגם $g \circ f = id_A$ אז f, g חח"ע ועל ולכן הפיכות ומתקיים $g = f^{-1}$.

<u>הגדרה</u>: הע"ל $T:V\to W$ היא הפיכה אם קיימת הע"ל $S:W\to V$

כך ש- $T\circ S=id_W$ וגם $S\circ T=id_V$

ונסמן $S=T^{-1}$

<u>משפט</u>: T הע"ל הפיכה $\Longleftrightarrow$ היא הע"ל חח"ע ועל

<u>משפט</u>: (1) הרכבה של העתקות לינאריות היא הע"ל

(2) ההופכית של הע"ל היא גם הע"ל

<u>סימון</u>: הע"ל חח"ע ועל נקראת "איזומורפיזם"

אם יש $T:V\to W$ איזומורפיזם אז נסמן $V\cong W$ (ונאמר ש- V איזומורפי ל- W.)

<u>הערה</u>: $\cong$ הוא יחס שקילות.

<u>תרגיל</u>: נתונה הע"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ שמקיימת

$$T(1,2)=(2,3)$$
$$T(1,3)=(2,4)$$

מצא $T(1,4)=?$

<u>פתרון</u>:

$$(1,4)=2(1,3)-(1,2)$$

$$\Rightarrow T(1,4)=T\big(2(1,3)-(1,2)\big)\underset{T\ \text{הע"ל}}{=}2T(1,3)-T(1,2)=$$

$$=2(2,4)-(2,3)=(2,5)$$

<u>תרגיל</u>: האם קיימת הע"ל המקיימת

$$\begin{cases}T(1,1)=(2,3)\\ T(2,2)=(4,7)\end{cases}$$

<u>פתרון</u>: לא, כי אם T הע"ל אזי

$$\underset{\underset{(4,7)}{\shortparallel}}{T(2,2)}=T\big(2(1,1)\big)=\underset{\underset{2(2,3)=(4,6)}{\shortparallel}}{2T(1,1)}$$

<u>סתירה!</u>

משפט ההגדרה: יהיו V, W מ"ו מעל F

יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V

ויהיו $\{w_1, \dots, w_n\}$ וקטורים כלשהם ב- W

אזי קיימת ה"ל יחידה המקיימת $\forall i \quad T(v_i) = w_i$

דוגמא: תהי $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ה"ל המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

אז כיוון ש- $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^2$ אז קיימת T יחידה כזו.

נמצא אותה:

צ"ל נמצא נוסחה כללית ל- $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

כיוון ש- $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אז כל וקטור ב- $\mathbb{R}^2$ הוא צ"ל שלהם.

נמצא את המקדמים α, β עבור וקטור כללי:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \beta = y$$

$$x = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = x - y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T\left((x-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \underset{\text{ה"ל } T}{=} (x-y)\,T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= (x-y)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\2x-2y\\3x-3y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4y\\5y\\6y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+3y\\2x+3y\\3x+3y\end{pmatrix}$$

בס"ד

עוד דוג': כמה הע"ל כאלה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ קיימות

$$\begin{cases} T(1,1)=(1,2,3) \\ T(1,-1)=(0,0,1) \end{cases}$$ ומצא אותן

פיתרון: קיימת 1 כזו עפ"י משפט ההגדרה שכן $\{(1,1),(1,-1)\}$ בסיס.

נמצא אותה: כ"ל נמצא $T(x,y)=?$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=\alpha-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta=\frac{x}{2}-\frac{y}{2} \\ \alpha=\frac{x}{2}+\frac{y}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(x,y)=T\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\cdot(1,1)+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)(1,-1)\right) \overset{T\ \text{הע"ל}}{=}$$

$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)T(1,1)+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)T(1,-1)=$$

$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)(1,2,3)+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cdot(0,0,1)=$$

$$=\left(\frac{x+y}{2},\frac{2x+2y}{2},\frac{3x+3y}{2}\right)+\left(0,0,\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{x+y}{2},\frac{2x+2y}{2},\frac{4x-2y}{2}\right)=\left(\frac{x+y}{2},x+y,2x-y\right)$$