המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 - 01/05 – סמסטר ב' תשע'ב

מבחן מועד א'

יום ה', כ'ט בתמוז תשע'ב, 19.7.12

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.

ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.

ג. משך הבחינה שעתיים וחצי. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שים לב: בזמן המבחן אסור שיהיה ברשותך טלפון נייד!

1. יהי X מרחב טופולוגי **קומפקטי** ו Y מרחב טופולוגי כלשהו.
נניח שקיימת פונקציה רציפה $f:X\to Y$ שהיא **על** Y. הראה שגם Y קומפקטי.

2. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}^2$ המתקבל מיחס השקילות הבא:
$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ אם $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$.
הראה ש X הומאומורפי ל $[0,\infty)$.

3. א. יהי X מרחב טופולוגי ונניח יש $A\subseteq X$ שהוא **קשיר** וגם **צפוף ב** X. הראה ש X קשיר.
ב. יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראה שאם A צפוף ב $\mathbb{R}$ ו $A\neq\mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

4. יהי (M,d) מרחב מטרי. הראה שפונקצית המטריקה $d:M\times M\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.
(הטופולוגיה על $M\times M$ היא טופולוגית המכפלה.)

5. יהי M מרחב מטרי, ונניח שיש $a\in M$ שהיא נקודת הצטברות של M.
יהי $A\subseteq\mathbb{R}$ תת המרחב הבא של $\mathbb{R}$: $A=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$
הראה שקיים שיכון $g:A\to M$.
(כזכור שיכון הוא העתקה שהיא הומאומורפיזם על תמונתה.)

בהצלחה!

טופולוגיה – 88 - 222 - 01/05 – סמסטר ב' תשע'ב

מבחן מועד ב'

יום ד', י'ח באלול תשע'ב, 5.9.12

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.

ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.

ג. משך הבחינה שעתיים וחצי. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שים לב: בזמן המבחן אסור שיהיה ברשותך טלפון נייד!

1. יהי X מרחב טופולוגי **קשיר מסילתית** ו Y מרחב טופולוגי כלשהו.

נניח שקיימת פונקציה רציפה $f:X\to Y$ שהיא **על** Y. הראה שגם Y קשיר מסילתית.

2. יהי M מרחב מטרי, ותהי $A\subseteq M$. הראה ש A סגורה ב M אם ורק אם A מקיימת את התכונה הבאה:

לכל סדרת נקודות $\{a_n\}$ ב A, אם $\{a_n\}$ מתכנסת ב M לנקודה x, אז $x\in A$.

3. יהי X מרחב טופולוגי **קומפקטי** ו Y מרחב טופולוגי **האוסדורף**.

הראה שכל פונקציה רציפה $f:X\to Y$ היא פונקציה סגורה.

4. יהי X מרחב טופולוגי. נגדיר את האלכסון של X כתת הקבוצה הבאה של $X\times X$:

$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$. או בלשון אחרת, $\Delta=\{(x,y)\in X\times X : x=y\}$.

הראה ש X הוא האוסדורף אם ורק אם Δ קבוצה סגורה ב $X\times X$.

5. תהי X קבוצה, ותהי T הטופולוגיה הקו-סופית על X, כלומר $T=\{\varnothing\}\cup\{A\subseteq X : \text{סופית } A^C\}$.

א. הראה ש (X,T) קומפקטי.

ב. עבור אילו קבוצות X מתקיים ש (X,T) קשיר.

בהצלחה!