פתרון תרגיל 3

1) א.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$$

נתבונן על ל הישר מהצורה $(x,0)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

כעת נתבונן על הישר מהצורה $(0,y)$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

ולכן הגבול לא קיים.

ב.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נתבונן הישר שבו $y=x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+x^2}} \to \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן אין גבול.

ג.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$0 \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| \le \frac{x^2}{|x|} = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ולכן לפי משפט הסנדביץ' הגבול הוא 0.

ד.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

נתבונן הישר בו $y=x^2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{2x^4} = 1$$

נתבונן הישר בו $y=-x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x^4}{2x^4} = -1$$

ולכן הגבול לא קיים.

ה.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 \le \left|(x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |(x+y)^2| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ולכן לפי כלל הסנדביץ' הגבול הוא 0.

ו.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-|x-y|}{e^{(x^2-2xy+y^2)}}$$

נסמן $t=x-y$, ונקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-|x-y|}{e^{(x^2-2xy+y^2)}} = \lim_{t\to 0} \frac{-|t|}{e^{t^2}} = 0$$

ז. $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^4+y^2}$

$$0 \le \left|\frac{x+y}{x^4+y^2}\right| \le \left|\frac{x}{x^4+y^2}\right| + \left|\frac{y}{x^4+y^2}\right| \le \left|\frac{x}{x^4}\right| + \left|\frac{y}{y^2}\right| = \left|\frac{1}{x^3}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| \xrightarrow[\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}]{} 0$$

ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ' הגבול הוא 0.

ח. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to\infty}} (1+x)^{\frac{y+x}{2xy}}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to\infty}} (1+x)^{\frac{y+x}{2xy}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to\infty}} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{y+x}{2y}}$$

ומכיוון ש: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to\infty}} \frac{y+x}{2y} = \frac{1}{2}$, נקבל:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to\infty}} (1+x)^{\frac{y+x}{2xy}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2) א. נבדוק האם הגבול הכפול קיים ושווה 0:

במסלול $x=0$ נקבל: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(y+1)}{x^2+y^2} = 0$

במסלול $y=x$ נקבל: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(y+1)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{2x^2} = \frac{1}{2}$

לכן הפונק' לא רציפה ב-$(0,0)$.

ב. $$0 \le \left|\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \le \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לכן $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ולכן f רציפה בנקודה.

3) א.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = -1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן הגבול הכפול לא קיים.

ב. $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) =$ הגבול לא קיים

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ לא קיים.

אך הגבול הכפול קיים ושווה לפי כלל הסנדוויץ' ל-0:

$$0 \le \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \le |x+y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ג.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=0$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן הגבול הכפול לא קיים.

4) לא נכון! ראינו בתרגול ש עבור הפונק' $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$$

אך עדיין הגבול הכפול אינו קיים.

5) א.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h^3}-0}{h}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3}-0}{h}=1$$

אם f דיפ' : $f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y+\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$

כאשר $\varepsilon(x,y)\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0$.

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=0+x+y+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y)=\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נבדוק האם $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varepsilon(x,y)=$$

נתקרב במסלול $y=x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x^3}-2x}{\sqrt{2x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2}\cdot x-2x}{\sqrt{2}\,|x|}=\pm\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0$$

ולכן f לא דיפרנציאבילית.

ב.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\sqrt{h^2}}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sqrt{h^2}}{h}=0$$

אם f דיפ' : $f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\varepsilon\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$=0+0+0+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y)=(x+y)\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0$$

ולכן f דיפרנציאבילית.

קטר

ג.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

לכן:
$$f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y)=\frac{x\sin y}{x^2+y^2}$$

נבדוק האם $\varepsilon\to 0$ כאשר $x\to 0$, $y\to 0$:

נתבונן במסלול $y=x$:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\sin y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

כלומר f אינה דיפרנציאבילית בראשית.

3. נתבונן במסלולים מהצורה $y=kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{2x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{2x^2+k^2x^2}=\frac{k}{2+k^2}$$

כלומר הגבול תלוי ב-k ולכן לא קיים. מכאן שהפונק׳ אינה רציפה ולכן בהכרח לא דיפ׳.

6) א.

$$f(1,1)=1^1=1$$

$$f_x=y\cdot x^{y-1}\ \rightarrow\ f_x(1,1)=1$$

$$f_y=x^y\ln x\ \rightarrow\ f_y(1,1)=0$$

$$f_{xx}=y(y-1)x^{y-2}\ \rightarrow\ f_{xx}(1,1)=0$$

$$f_{xy}=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x\ \rightarrow\ f_{xy}(1,1)=1$$

$$f_{yy}=x^y\ln^2 x\ \rightarrow\ f_{yy}(1,1)=0$$

$$f(x,y)\approx f(1,1)+f_x(1,1)\cdot\Delta x+f_y(1,1)\cdot\Delta y+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,1)(\Delta x)^2+2f_{xy}(1,1)\Delta x\Delta y\right.$$
$$\left.+f_{yy}(1,1)(\Delta y)^2\right)$$
$$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$

ב.

$$f(0,0)=0$$

$$f_x=2x\cos(x^2+y^2)\ \longrightarrow\ f_x(0,0)=0$$

$f_x = 2x\cos(x^2+y^2) \to f_x(0,0)=0$

$f_{xx} = 2\cos(x^2+y^2) + 2x(-2x\sin(x^2+y^2)) \to f_{xx}(0,0)=2$

$f_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2) \to f_{xy}(0,0)=0$

$f_{yy} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) \to f_{yy}(0,0)=2$

$f(x,y) \approx \frac{1}{2}(2x^2+2y^2) = x^2+y^2$

7)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= \frac{e^x}{e^x+e^y}\cdot 1 + \frac{e^y}{e^x+e^y}\cdot 3x^2$$

$$= \frac{e^x}{e^x+e^{x^3}} + \frac{e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}\cdot 3x^2$$

8)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 2u\ln v\cdot\frac{1}{y} + \frac{u^2}{v}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2x}{y^2}\ln\frac{y}{x} + \frac{x^3}{y^3}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{2x}{y^2}\ln\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 2u\ln v\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{-2x^2}{y^3}\ln\frac{y}{x} + \frac{x^2}{y^3}$$

9) נגדיר $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$

הנורמל למישור המשיק בכל נק' יהיה: $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$

נדרוש כי הנורמל למישור $x+y+z=1$, שהוא $(1,1,1)$ יהיה מקביל לנורמל שמצאנו.

$$(2x, 2y, -2z) = \alpha(1,1,1)$$

$$x = \alpha/2 \quad , \quad y = \alpha/2 \quad , \quad z = -\alpha/2$$

נציב במשוואה הנתון: $x^2+y^2-z^2 = (\alpha/2)^2+(\alpha/2)^2-(-\alpha/2)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \alpha = \pm 2$

ונקבל שתי נקודות: $(1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$.

10) $$\frac{\partial z}{\partial l}\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right) = \nabla z\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right)\cdot(\cos 60,\ \sin 60)$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{9}{4}+\frac{9}{2}},\ \frac{1}{\frac{9}{4}+\frac{9}{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{27} + \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

11) אם f דיפ׳ בנק׳ a, אז הנגזרת המכוונת בכל כיוון $\vec{h}$ שווה ל $\nabla f\cdot\hat{h}$.

$$f_x(1,0) = \left.\frac{(3x^2+2xy)(x^2+y^2)-(x^3+x^2y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right|_{(1,0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f_y(1,0) = \left.\frac{x^2(x^2+y^2)-(x^3+x^2y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right|_{(1,0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(1,0) = (1,1)\cdot(h_1,h_2) = h_1+h_2$$