

אלגברה לינארית להנדסה בר-אילן

מועד ב' התשע"ט ד"ר שפרה רייף וד"ר מיטל אליהו רובינסון.

מתרגלים : אחיה בר-און, עוזי חרוש, יעל רוזנשטרק, הראל רוזנפלד.

זמן הבחינה : 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לכל שאלה ותכננו את חלוקת הזמן

מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!

בסוף הבחינה יש דפי טיוטה לשימושכם.

אם תרצו לכתוב שם תשובות - סמנו זאת : המשך לתשובה ... בעמ' ...

הערה: כל המרחבים הווקטורים בבחינה הם ממימד סופי.

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} ויהיו $\vec{x}, \vec{y} \in V$. הוכח ש

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (\text{א})$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \quad (\text{ב})$$

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(א) הוכח שאם קיים ל \mathbb{R}^n בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A אזי A לכסינה.

(ב) האם המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

לכסינה?

שאלה 3. (א) יהיו U, V, W מרחבים וקטורים ותהיינה

$T_1 : V \rightarrow U$ חד-חד ערכית, $T_2 : U \rightarrow W$ על.

נניח ש $\text{Im} T_1 = \ker T_2$. הוכח ש

$$\dim U = \dim V + \dim W$$

(ב) האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ כך ש $\text{Im} T = \ker T$? אם כן, מצאו את T בצורה מפורשת. אם לא, הוכיחו שאינה קיימת.

שאלה 4. תהי

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (א) מצאו בסיס למרחב העמודות של A .
- (ב) השלימו את הבסיס מסעיף א' לבסיס של \mathbb{R}^5 .
- (ג) האם קיימת מטריצה B כך ש $rank(AB) = 2$? אם כן, מצאו B כזאת. אם לא, הוכיחו שאין.

שאלה 5. נניח ש $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ אינה הפיכה.

(א) הוכח ש A, A^2, A^3, A^4 תלויות לינארית כוקטורים ב $\mathbb{R}^{4 \times 4}$.

(ב) הוכח או הפרך את הטענה הבאה.

$$\dim \text{span}\{A, A^2, A^3\} = \text{rank}A$$

המשך תשובה לשאלה