תזכורת - חוג(קומוטטיבי מקומי)

חוג עם אידיאל מקסימלי יחיד:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, dash] \\ M \end{tikzcd}$$

יש שדה שאריות: R/M.
לדוגמה, $R = \mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$. שדה השארית=$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

בנייה של המספרים הממשיים

יש מספרים רציונליים $\frac{n}{m}$:

- יש חיבור
- יש כפל
- יש יחס סדר: $\frac{n}{m} < \frac{n'}{m'}$ ($\Leftrightarrow m \cdot m'^2 \cdot n < n' \cdot m^2 \cdot m'$)
- יש ערך מוחלט - $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$
- יש סדרות: $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

הגדרה: סדרה (x_n) (של רציונליים) נקראת סדרת קושי אם

$$\forall_m \exists_N \forall_{n,n'>N} : |x_n - x_{n'}| < \frac{1}{m}$$

נגדיר: $R = \{(x_n) |$ סדרת קושי $(x_n)\}$.

R סגור לחיבור וכפל והוא <u>חוג</u>.
ניתן להגדיר לו אידיאלים שמתאפסים במקום מסויים: $I_k = \{(x_n) | x_k = 0\}$. לפי זה אפשר להגדיר הומומורפיזם:

$$R \to \mathbb{Q}$$

$$(x_n) \mapsto x_k$$

הגרעין הוא I_k ולכן $R/I_k \cong \mathbb{Q}$, ולכן I_k אידיאל מקסימלי לכל k:

$$\begin{tikzcd} & & R \arrow[dll, no head] \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots \end{tikzcd}$$

נסמן: $J_k = I_{k+1} \cap I_{k+2} \cap I_{k+3} \cap \dots$

ואז

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$$

נגדיר: $J = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ - אידאל הסדרות שמאפסות לבסוף.

$J \subsetneq R$ כי הוא כולל רק סדרות שמתאפסות לבסוף - למשל $J \notin \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$.

הערה: לכל k, $J + I_k = R$. במילים אחרות, $J \not\subseteq I_k$.
למשל:$(1, 1, 1, ..., x_k = 1, 0, 0, ...)$

J אינו מוכל באידיאלים המקסימליים I_k - אבל כל אידיאל מוכל באידיאל מקסימלי! נרצה למצוא אידיאל מקסימלי שמכיל אותו(יכול להיות J).

נסמן: $$M = \{(x_n) | x_n \to 0\} = \left\{ (x_n) \middle| \forall_m \exists_N : n > N \Rightarrow |x_n| < \frac{1}{m} \right\} \subseteq R$$

אם $x_n \to 0$ ו$(y_n) \in R$, אז (y_n) חסומה ולכן $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n) \to 0$, כלומר $J \subseteq M \lhd R$.

נתבונן בחוג R/J. "מאפסים" את הסדרות שמתכנסות, כלומר את החלק של הסדרה שמתכנס, ולכן R/J זה בעצם "זנבות של סדרות קושי".

נוכיח שM/J הוא האידאל המקסימלי היחיד של R/J.

נאמר שסדרת קושי היא חיובית(שלילית) אם הרכיבים שלה חיוביים(שליליים) או שווים לאפס ממקום מסויים ואילך.

טענה: סדרת קושי שאינה מתכנסת לאפס היא חיובית או שלילית.

הוכחה: תהי (x_n) סדרת קושי שאינה חיובית ואינה שלילית. יהי m מספר טבעי. קיים N כך שלכל $N < n, n'$, $|x_n - x_{n'}| < \frac{1}{m}$.
יהי $N < n$. קיים $N < n'$ כך ש$x_n, x_{n'}$ בעלי סימנים הפוכים.

$$|x_n| \le |x_1| + |x_{n'}| = |x_n - x_{n'}| < \frac{1}{m}$$

כלומר, $(x_n) \to 0$

מסקנה: כל איבר בR שאינו בM הוא או חיובי או שלילי.

טענה: תהי (x_n) סדרת קושי שאינה מתכנסת ל0. <u>נניח ש$\forall_n x_n \neq 0$</u>. אז $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ סדרת קושי[תרגיל]

משפט: R/J חוג מקומי שM/J האידאל המקסימלי היחיד שלו.

הוכחה: מספיק להוכיח שכל איבר של של R/J מחוץ לM/J הוא הפיך.
יהי $\alpha \in R/J$, כלומר $\alpha = (x_n) + J$.
אם בx_n יש אינסוף אפסים, אז $(x_n) \in M$ ו$\alpha \in M/J$. אחרת יש ב(x_n) מספר סופי של אפסים, ואם נחליף אותם ברכיבים$\neq 0$ נשאר באותו קוסט של J.
לפי הטענה הקודמת, $\left(\frac{1}{x_n}\right) \in R$, כלומר $(x_n)^{-1} = (x_n)$הפיכה בR
$\Leftarrow$ α הפיכה בR/J.
$\Leftarrow$ M אידיאל מקסימלי של R
$\Leftarrow$ $\boxed{R/M}$ שדה.

אפשר להגדיר שיכון:

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow R$$

$$\alpha \mapsto (\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$$

התמונה של $\mathbb{Q}$ היא תת־חוג של R, שנסמן ב$\mathbb{Q}$. למשל $\mathbb{Q} \cap M = 0$

$$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Q}\cap M \cong \mathbb{Q}+M/M \subseteq R/M =: \mathbb{R}$$

($\mathbb{R}$ הוא השדה היחידה שהוא חוג מנה של R/J)
הוכחנו שכל איבר$\neq 0$ ב$\mathbb{R}$ הוא חיובי או שלילי. זה מגדיר יחס סדר:

$$0 < \alpha - \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha$$

אז:
- סכום של חיוביים הוא חיובי
- מכפלה של חיוביים היא חיובית
- היחס <u>לינארי</u>

$\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ שדה סדור

הגדרה: שדה סדור $\mathbb{F}$ הוא <u>ארכימדי</u> אם לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ יש מספר טבעי n $\alpha < n$(הכוונה לחיבור $1_{\mathbb{F}}$ n פעמים)

טענה: $\mathbb{R}$ ארכימדי

הוכחה: כל סדרת קושי חסומה על ידי מספר רציונלי

משפט: $\mathbb{R}$ שלם במובן הבא: כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: קיים שדה שלם ארכימדי יחיד.

הוכחה: תהי $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{R}$ סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$.
לכל m, $\alpha_m = (x_{mn}) + M$, כאשר $x_{m1}, x_{m2}, \dots \in \mathbb{Q}$ סדרת קושי:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & = & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ \alpha_2 & = & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ \alpha_3 & = & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots \\ ? \end{array}$$

נבחר $\alpha = (x_{nn}) + M$. צ"ל $(x_{nn}) \in \mathbb{R}$.
נוכיח שהסדרה (α_m) מתכנסת ל-α.
יהי k מספר טבעי. קיים N כך שלכל $N < m, m'$, $|\alpha_m - \alpha_{m'}| < \frac{1}{k}$
...

הערה: יש שני מושגים של שלמות לשדות סדורים:

- שדה שלם במובן סדרות = כל סדרת קושי מתכנסת.
- שדה שלם במובן חסמים = לכל קבוצה חסומה יש חסם עליון.

משפט: שדה סדור הוא שלם במובן של חסמים $\Leftrightarrow$ ארכימדי + שלם במובן של סדרות

מבוא לסעיף הבא

R חוג. רוצים לשכן $R \subseteq Q$ כך שאיברים מסויימים של R יהיו הפיכים.

הערה: נניח ש-$a \in R \subseteq Q$. נניח ש-a הפיך ב-Q. אז a לא מחלק אפס ב-R: $\underbrace{ab}_{\in R} = 0$

$$\Leftarrow b = \underbrace{a^{-1}}_{\in Q} \cdot ab = 0$$

המטרה היא לבנות הרחבה של R שבה אברים מרכזיים מסויימים, שאינם מחלקי אפס, הם הפיכים.
לדוגמה:

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right] = \left\{ \frac{n}{3^i} \middle| \begin{array}{c} n \in \mathbb{Z} \\ i \geq 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

נתונים חוג R ו-$S \subseteq R$ סגורה לכפל, מוכלת במרכז, אברים אינם מחלקי אפס.
נבנה $R \subseteq S^{-1}R$