88-524-תרגיל 6

1. נסתכל על קבוצת ההעתקות הפרוייקטיביות מהישר הפרוייקטיבי RP^1 לעצמו אשר שומרות על הקבוצה $\{0,1,\infty\}$ (ז"א: לכל $x\in\{0,1,\infty\}$ מתקיים $f(x)\in\{0,1,\infty\}$).
א.לאיזו חבורה איזומורפית קבוצת ההעתקות הנ"ל? הוכיחו איזומורפיזם.

ראשית, ניתן לראות שקבוצת העתקות זו היא חבורה היות והיא תת חבורה של $PGL_2(R)$ (קיימת סגירות כי הרכבת כל שתי העתקות שמשאירות את $\{0,1,\infty\}$ ב $\{0,1,\infty\}$ גם תשאיר אותן, וההפיכים גם בפנים היות ואלו העתקות הפיכות ומקורות $\{0,1,\infty\}$ הם $\{0,1,\infty\}$).

כעת נשים לב כי היות והיא שולחת 3 איברים לעצמם היא בעצם מגדירה עליהם תמורה, לכן קיימת העתקה f מקבוצת ההעתקות הנ"ל ל- Sym_3, כלומר נסמן 0 איבר ראשון, 1 איבר שני, אינסוף איבר שלישי ונתאים לכל העתקה את התמורה המעבירה i ל j אם האיבר ה-i עבר לאיבר ה-j.

העתקה זו היא <u>הומומורפיזם</u> היות והרכבת פונקציות תעבור להרכבת תמורות.

היא <u>חח"ע</u> היות ואם- $f(\sigma)=id$ אז $\sigma(0)=0,\sigma(1)=1,\sigma(\infty)=\infty$,
לכן: $b=0,c=0\Rightarrow a=d\Rightarrow\sigma(x)=x$. כלומר הגרעין הוא רק איבר היחידה:id .

<u>על</u> ניתן להראות מסעיף ב'.

ב. כמה העתקות פרוייקטיביות כאלו ישנן? מצא את כולן (כלומר רישמו את צורתן המפורשת: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$).

ג. כיתבו את המטריצות המתאימות להעתקות אלו ב $PSL_2(R)$.

$$f(x)=x,\qquad 1/x,\qquad 1-x,\qquad 1/(1-x),\qquad (x-1)/x,\qquad x/(x-1)$$

בהתאמה
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

2. יהי F שדה סופי עם q איברים.
   א. מיצאו את הסדר של $GL_n(F)$.

בעמודה הראשונה כל הוקטורים מעל F לא כולל וקטור ה-0, בעמודה השניה כל הוקטורים מעל F לא כולל כפולות של העמודה הראשונה, וכן הלאה... לכן:
$$\left(q^n-1\right)\left(q^n-q\right)\cdots\left(q^n-q^{n-1}\right)$$

ב. מיצאו את הסדר של $PGL_n(F) := GL_n(F)/Z(GL_n(F))$.

$$\left(q^n-1\right)\left(q^n-q\right)\cdots\left(q^n-q^{n-1}\right)/(q-1)$$

ג. הוכיחו כי קיים הומומורפיזם $PGL_2(F) \to Sym_{q+1}$ כאשר Sym_{q+1} היא החבורה הסימטרית (חבורת התמורות) על q+1 איברים. הראו כי הומומ' זה איננו על עבור q>5.

קיימת העתקה כזו מכיוון שכל מטריצה כזו משרה העתקה על q+1 הנקודות של הקו הפרוייקטיבי. ניתן להראות בבדיקה ישירה שזהו הומומ' וכמו כן שאיננו על כבר עבור q>3.

ד. הוכיחו שהומומ' זה הוא חח"ע.

ע"פ בדיקת האיברים בגרעין: $f(\sigma)=id$ אז $\sigma(0)=0, \sigma(1)=1, \sigma(\infty)=\infty$,
לכן: $b=0, c=0 \Rightarrow a=d \Rightarrow \sigma(x)=x$

3. יהי F שדה עם 3 איברים. הכיחו כי:
א. $PGL_2(F) \cong Sym_4$

לפי השאלה הקודמת קיים מונומ' ביניהן, היות וסידריהן שווים (בשני המיקרים 24 לפי 2ב) אז המונומ' הוא גם על ובסה"כ איזומ'.

ב. $PSL_2(F) \cong A_4 = [Sym_4$ ב $-$ הזוגיות התמורות ת"ח$]$

הסדר של $PSL_2(F)$ הוא 12 . מכיוון שהת"ח הנורמלית היחידה ב Sym_4 מסדר 12 היא A_4 ו $PSL_2(F)$ היא ת"ח נורמלית של $PGL_2(F)$ נקבל את האיזומורפיזם הנדרש.