דף תרגילים 7

1. נתון המשטח $M=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=9\}$
   א. מצאו פרמטרזציה $X(\theta,\phi)$ של M.
   ב. נתונה עקומה $\beta(t)=X(\theta(t),\phi(t))$ על המשטח M כך שהווקטור $\beta''(t)$ תלוי לינארית ב- $\beta(t)$. מצאו משוואה דפרנציאלית שעל $(\theta(t),\phi(t))$ לקיים.

   מכיוון ש $\beta(t)$ פרופרוציוני לנורמל בספירה, המשמעות של הניסוח היא ש $\beta(t)$ היא עקומה גיאודזית ולכן המשוואות הן המשוואות הגיאודזיות.

2. נתונים המשטחים הבאים בעזרת פרמטריזציה. מצאו את התבנית היסודית הראשונה, את העתקת ויינגרטן, את התבנית היסודית השניה ואת המשוואות הגיאודזיות שלהם.
   א. אליפסואיד,
$$X(u,v)=\begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ c\sin u \end{pmatrix},\ \ a,c>0$$
   ב. חרוט,
$$X(u,v)=\begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ ku \end{pmatrix},\ \ k>0$$
   ג. טורוס,
$$X(u,v)=\begin{pmatrix} (2+\cos u)\cos v \\ (2+\cos u)\sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$
   ד. הליקואיד,
$$X(u,v)=\begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ kv \end{pmatrix}, k>0$$

3. תהי $\beta(t)=X\circ\alpha(t)$ עקומה על משטח עם פרמטריזציה $X(u,v)$. נניח כי לכל t הוקטור $\beta(t)$ פרופרוציוני ל $X_1\times X_2$. מצאו משוואות דיפרנציאליות אשר α^1,α^2 חייבים לקיים.

   כמו ב1, גם כאן $\beta(t)$ היא עקומה גיאודזית ולכן המשוואות הן המשוואות הגיאודזיות.

4. מצאו את **הקווים** הגיאודזים של משטח בעל המטריקה $G(u,v)=\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. **שימו לב** שיש למצוא את הקווים עצמם, ולא רק את המשוואות. **רמז:** כדאי להשתמש בכך שהתנועה על הקווים היא במהירות קבועה, כלומר במשוואה $\|\beta'\|^2=c$.

   באמצעות חישוב סטנדרטי נקבל:

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},\qquad \Gamma^2{}_{22}=\Gamma^1{}_{12}=\Gamma^1{}_{21}=+\frac{1}{2v},\qquad \Gamma^2{}_{11}=-\frac{1}{2v}$$

ומשוואות הקווים הגיאודזיים יהיו:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \frac{1}{v}\dot{u}\dot{v} = 0 \\ \ddot{v} - \frac{1}{2v}\dot{u}^2 + \frac{1}{2v}\dot{v}^2 = 0 \end{cases}$$

בנוסף נוכל להשתמש כרגיל במשוואת הפרמטריזציה הטבעית:

$$1 = \|\dot{\gamma}\|^2 = v\dot{u}^2 + v\dot{v}^2$$

מהמשוואה הראשונה לעיל נקבל:

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = -\frac{\dot{v}}{v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln \dot{u}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln v\right) \quad \Longrightarrow \quad \dot{u} = \frac{A}{v}$$

נציב במשוואה השלישית:

$$1 = v\left(\frac{A}{v}\right)^2 + v\dot{v}^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = \frac{\sqrt{v - A^2}}{v}$$

מכאן:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{\frac{A}{v}}{\frac{\sqrt{v-A^2}}{v}} = \frac{A}{\sqrt{v - A^2}}$$

ולכן:

$$u = \int \frac{A}{\sqrt{v - A^2}}\mathrm{d}v = 2A\sqrt{v - A^2} + B$$

לפיכך הקווים הגיאודזיים הם:

$$\gamma\left(t\right) = \left(2A\sqrt{t - A^2} + B, t\right)$$