פתרון תרגיל בית 10 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש״ף

שאלה 1. מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון $\varphi\colon U_8 \to S_4$ וכתבו אותו באופן מפורש.

פתרון. אנחנו יודעים כי $U_8 = \{1,3,5,7\}$ לפי תרגיל בית 3. ניתן לכל איבר שם חדש

$$1 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 2, \qquad 5 \mapsto 3, \qquad 7 \mapsto 4$$

ברור ש-1 נשלח ל-$\mathrm{id} \in S_4$. לשאר האיברים נעזר בטבלת הכפל שחישבנו בעבר, כדי לחשב לאן שאר האיברים נשלחים. למשל כפל משמאל ב-3 שולח את 1 ל-3 ולכן התמורה שאליה נשלח את 3 תעביר את 1 ל-2. חישוב סופי:

$$1 \mapsto \mathrm{id}, \qquad 3 \mapsto (12)(34), \qquad 5 \mapsto (13)(24), \qquad 7 \mapsto (14)(23)$$

שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזם הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של ${}^{G}\!/_{H}$ לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

1. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

2. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)/H$.

פתרון.

1. זה ממש לפי משפט ההתאמה. ההכלה הדו־כיוונית בפירוט:

$$\begin{aligned}
&xH \in (K_1/H) \cap (K_2/H) \Leftrightarrow \\
&xH \in (K_1/H) \wedge xH \in (K_2/H) \Leftrightarrow \\
&x \in K_1 \wedge x \in K_2 \Leftrightarrow \\
&x \in K_1 \cap K_2 \Leftrightarrow \\
&xH \in (K_1 \cap K_2)/H \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

2. לפי הסעיף הקודם נסיק ש-$\left(K_1 \cap K_2\right)/H$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G/H המוכלת ב-K_1/H וב-K_2/H.

שאלה 3. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $\left(HN_1\right)/N_1 \cong \left(HN_2\right)/N_2$.

פתרון. מיידי משימוש כפול במשפט האיזומורפיזם השני:

$$\left(HN_1\right)/N_1 \cong H/\left(N_1 \cap H\right) = H/\left(N_2 \cap H\right) \cong \left(HN_2\right)/N_2$$

שאלה 4. תהי G חבורה מסדר n, ויהי $\varphi : G \to S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו ש-$g \in G$ הוא מסדר m אמ"ם $\varphi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים.

פתרון. ראשית, נניח ש-g מסדר m. יהי $x \in G$. שימו לב שגודל הקבוצה $\left\{x, gx, g^2x, g^3x, \dots\right\}$ הוא m, מכיוון שלכל $i \neq j$, $g^ix \neq g^jx$; כלומר, המסלול של כל איבר הוא מסדר m. לכן g יוצר חלוקה של איברי החבורה ל-$\dfrac{n}{m}$ מסלולים מגודל m.

הכיוון השני ברור, מכיוון שסדר של איברים נשמר תחת שיכון.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית ותהינה $H, N \leq G$ תת־חבורות.

1. הפריכו ש-$HN \leq G$ היא תמיד תת־חבורה.

2. אם $H, N \lhd G$ נורמליות כך ש-$\left(\left[G : H\right], \left[G : N\right]\right) = 1$, הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר רשות: אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

פתרון.

1. אפשר לבחור את $G = D_4$ וצריך לבחור תת־חבורות שאינן נורמליות. נבחר את $H = \langle \tau \rangle, N = \langle \tau\sigma \rangle$. הקבוצה $HN = \{\mathrm{id}, \tau, \tau\sigma, \sigma\}$ אינה תת־חבורה כי היא אינה סגורה לפעולה. למשל $\tau\sigma \cdot \sigma = \tau\sigma^2 \notin HN$. היא גם לא סגורה להופכי כי $\sigma^{-1} \notin HN$.
דוגמה פופלרית אחרת היא $G = S_3$ ו-$H = \langle (12) \rangle, N = \langle (23) \rangle$. אז בקבוצה HN ישנם ארבעה איברים $\{\mathrm{id}, (12), (23), (123)\}$. לפי משפט לגראנז' הסדר של תת־חבורה מחלק את סדר החבורה, אבל 4 לא מחלק את $\left|S_3\right| = 6$, שזו סתירה.

2. הוכחה: בכיתה למדנו שמפני ש-$H, N \lhd G$, אז HN היא תת־חבורה (ואפילו נורמלית). בנוסף $H, N \leq HN$. מכפליות האינדקס נקבל

$$\left[G : H\right] = \left[G : HN\right]\left[HN : H\right]$$

וטענה דומה עבור N. לכן $\left[G : HN\right]$ מחלקת את $\left[G : H\right]$ ואת $\left[G : N\right]$. מהנתון שהאינדקסים האלו זרים נסיק כי $\left[G : HN\right] = 1$, ולכן $G = HN$.

שאלה 6. תהי שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \dots$, ונסמן $H = \bigcup_i G_i$ עבור איחודן. אפשר לקבל כעובדה שגם H היא חבורה (זו הייתה מסקנה של שאלת רשות 9 בתרגיל בית 4).

1. הוכיחו שאם G_i היא חבורה פשוטה לכל i, אז גם H פשוטה.
הערה: כך ניתן ליצור חבורות פשוטות אינסופיות מחבורות פשוטות סופיות.

2. תהי S חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו שאם $K \leq S$ תת־חבורה, אז $[S:K]=1$ או $[S:K]=\infty$. רמז: העידון של משפט קיילי.

פתרון.

1. תהי $H \rhd N$. לכן לכל $h \in H$ מתקיים $hNh^{-1}=N$. בפרט לכל i ולכל $g \in G_i$ מתקיים $gNg^{-1}=N$. נתבונן בחיתוך $N \cap G_i$. מתקיים שכל $gxg^{-1} \in g(N \cap G_i)g^{-1}$ שייך גם ל-N (כי היא סגורה להצמדה) ושייך גם ל-G_i (כי זו מכפלה של איברים מ-G_i). לכן $N \cap G_i \lhd G_i$.
אבל לכל i החבורה G_i פשוטה, ולכן או ש-$N \cap G_i = G_i$ או ש-$N \cap G_i=\{e\}$. אם $N \neq \{e\}$ אז קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$N \cap G_k \neq \{e\}$, שהרי איבר $n \in N$ שאינו טריוויאלי מוכל ב-G_i כלשהו. לכן $N \cap G_k = G_k$. בפרט לכל $i \geq k$ מתקיים $N \cap G_i \neq \{e\}$, ולכן $N \cap G_i = G_i$. כלומר $G_i \subseteq N$ לכל $i \geq k$. אזי

$$N \subseteq H = \bigcup_i G_i = \bigcup_{i \geq k} G_i \subseteq N$$

וקיבלנו $N = H$. לכן אין ל-H תת־חבורות נורמליות לא טריוויאליות, כדרוש.

2. אם $K = S$, אז $[S:K]=1$ וסיימנו. אחרת, $K \subsetneq S$. נניח בשלילה כי $[S:K]=n<\infty$. לפי העידון של משפט קיילי, K מכילה תת־חבורה נורמלית $S \rhd N$ המקיימת $[S:N]|n!$. כלומר $[S:N]<\infty$. מפני ש-S פשוטה ו-$N \neq S$ (כי N מוכלת ב-K) נורמלית, אז בהכרח $N=\{e\}$. לכן $[S:N]=\infty$, וזו סתירה.

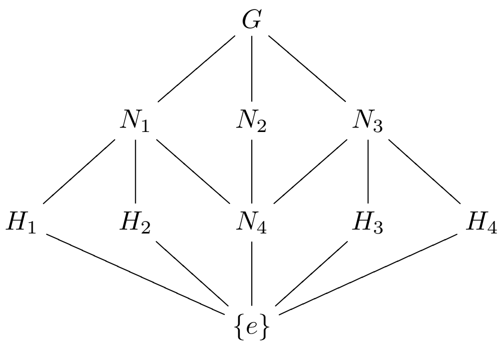
שאלה 7. תהי G חבורה סופית, ו$N \lhd G$ תת-חבורה נורמלית כך ש $(|N|,[G:N])=1$. הוכיחו בעזרת משפטי האיזומורפיזם שאין ב-G עוד תת-חבורה מסדר $|N|$. (רמז: הוכיחו ש$[H:H \cap N]=1$ לכל תת חבורה H מסדר $|N|$.)

פתרון. נניח $H \leq G$ תת-חבורה מסדר $|N|$.
נַנסה להראות ש $[H:H \cap N]=1$ וזה יוכיח כי $H \subseteq N$ ובגלל הגודל נקבל שיוויון.
מכיוון וN נורמלית, $NH \leq G$ היא תת-חבורה.
מצד אחד, לפי לגראנז' $|N|=|H| \mid [H:H \cap N]$.
מצד שני, לפי משפט האיזו' השני $[H:H \cap N]=[NH:N]$ ולפי כפליות האינדקס $[NH:N] \mid [G:N]$ ולכן $[H:N \cap H] \mid [G:N]$.
קיבלנו ש$[H:H \cap N]$ מחלק משותף של $|N|$ו $[G:N]$, אך הם זרים לפי הנתון ולכן $[H:H \cap N]=1$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.

רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.