שיעורי בית 3

.

1. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקווטרניונים: נגדיר

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. (סימונים מקובלים:

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},i=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},k=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

ואז $G=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$).
מצאו את $C(G)$.

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}:\ det(A)=a^2+b^2\neq0\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. מצאו את $C(G)$.

2. תזכורת מש.ב. הקודמים: עבור $\sigma\in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\dots i_m)\in S_n$ מתקיים השיוויון $\sigma\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)\sigma^{-1}=\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)$

(א) יהא $n>2$. הוכיחו כי לכל מחזור $\tau\in S_n$ מאורך לפחות 2 קיימת תמורה $\sigma\in S_n$ כך ש $\sigma\tau\neq\tau\sigma$

(ב) יהא $n>2$. הוכיחו כי $C(S_n)=\{id\}$

3.

(א) תהא G חבורה בה מתקיים: $\forall g \in G: g^2 = e$. הוכיחו: G חבורה חילופית.

(ב) תהא G חבורה בה מתקיים: $\forall g_1, g_2 \in G: (g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$. הוכיחו: G חבורה חילופית.

(ג) נגדיר את החבורה הדיהדרלית D_5 (חבורת השיקופים והסיבובים) באופן הבא: נסמן: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}$, ונגדיר את החבורה להיות:

$$D_5 = \left\{ \tau^i \sigma^j | i \in \{0,1\}, j \in \{0, \dots 4\} \right\}$$

עם פעולת כפל מטריצות רגיל. מצאו $x, y \in D_5$ כך ש- $(xy)^2 \neq x^2 y^2$.

.4

(א) תהא G חבורה. הוכיחו שהמרכז שלה, $C(G)$, הוא גם חבורה (ביחס לאותה פעולה של G)

(ב) תהא G חבורה, הוכיחו:

$$C(C(G)) = C(G)$$