תרגיל מספר 11 מבנים אלגבריים

1. יהא $0 \neq f(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום מדרגה n. ראינו בתירגול כי $\{ {}^{\mathbb{F}[x]}/_{\langle f \rangle} \ni g \; n > \deg(g) \; | [g] \} = {}^{\mathbb{F}[x]}/_{I(f)}$. הוכיחו כי בקבוצה זאת האיברים שונים. כלומר, יהיו g_1, g_2 שני פולינומים מדרגה קטנה מ n. הוכיחו כי

$$[g_1] = [g_2] \iff g_1 = g_2$$

(להזכירכם היחס השקילות הוא $g \sim_I g' \iff g - g' \in I$).

פתרון :

($\Leftarrow$) ברור.

($\Rightarrow$) נתון $[g_1] = [g_2]$ אזי $g_1 \sim_I g_2$ כלומר $g_1 - g_2 \in I(f)$. ומכאן כי

$$\exists g \in \mathbb{F}[x] : \; g_1 - g_2 = fg$$

נרצה להראות כי $g = 0$. נניח בשלילה כי $g \neq 0$ אזי $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \geq \deg(f) = n$ מצד שני $\deg(g_1 - g_2) \leq \max\{\deg(g_1), \deg(g_2)\} < n$. סתירה. לכן $g = 0$ ולכן $g_1 = g_2$.

2. עבור הפולינומים $a(x) = 1 + 2x^2, b(x) = 2 + x \in \mathbb{R}[x]$ מתקיים כי $\gcd(a, b) = 1$ ומתקיים

$$1 = \frac{1}{9}a(x) - \frac{2x-4}{9}b(x)$$

מצאו פולינום $f(x)$ המקיים

$$f(x) \quad \sim_{a(x)} \quad x$$

$$f(x) \quad \sim_{b(x)} \quad 5$$

כאשר $g \sim_{a(x)} f$ פירושו $g \sim_{I(a(x))} f$ או יותר מפורש $f - g \in I(a(x))$. [השתמשו ברעיון דומה למשפט השאריות הסיני]

פתרון :

$$1 = \frac{1}{9}a(x) - \frac{2x-4}{9}b(x)$$

לכן

$$\frac{1}{9}a(x) \sim_{b(x)} 1, \; -\frac{1}{9}a(x) \sim_{a(x)} 0$$

$$-\frac{2x-4}{9}b(x) \sim_{b(x)} 0, \; -\frac{2x-4}{9}b(x) \sim_{a(x)} = 1$$

ומכאן שנגדיר

$$f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{9}a(x)\right] + 5 \cdot \left[-\frac{2x-4}{9}b(x)\right]$$

יקיים

$$f(x) \sim_{a(x)} 5 \cdot [-\frac{2x-4}{9}b(x)] \sim_{a(x)} 5 \cdot 1 = 5$$

ובנוסף

$$f(x) \sim_{b(x)} x \cdot [\frac{1}{9}a(x)] \sim_{b(x)} x \cdot 1 = x$$

כנדרש.

3. תזכורת: יהיו R_1, R_2 חוגים. פונקציה $\phi : R_1 \to R_2$ תקרא הומומורפיזם של חוגים אם
   1. לכל $x, y \in R_1$ מתקיים $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
   2. לכל $x, y \in R_1$ מתקיים $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$

   הערה: נסמן $R_1 \cong R_2$ (R_1 איזומורפי ל R_2) אם קיים $\phi : R_1 \to R_2$ הומורפיזם חח"ע ועל.

   (א) הוכיחו כי הגרעין $\ker\phi = \{x \in R_1 | \, \phi(x) = 0\}$ הוא אידיאל של R_1.
   פתרון : נוכיח $\ker\phi$ תת חבורה ביחס לחיבור .
   1. סגירות: יהיו $x_1, x_2 \in \ker\phi$ אזי $\phi(x_1) = 0, \phi(x_2) = 0$ ולכן $0 = 0 + 0 = \phi(x_1) + \phi(x_2) = \phi(x_1 + x_2)$ ולכן $x_1 + x_2 \in \ker\phi$.
   2. נטרלי: כיוון ש $\phi(0) = 0$ (כי ϕבפרט הומומורפיזם בין החבורות $(R_1, +)$ ל $(R_2, +)$) נקבל כי $0 \in \ker\phi$
   3. נגדי: יהא $x \in \ker\phi$ אזי $\phi(x) = 0$ לכן $0 = \phi(0) = \phi(x-x) = \phi(x) + \phi(-x)$ ולכן $\phi(-x) = -\phi(x) = -0 = 0$ לכן $-x \in \ker\phi$ גם כן.

   נוכיח כי $\ker\phi$ בולע:
   יהא $x \in \ker\phi$ ו $r \in R_1$ אזי $\phi(rx) = \phi(r)\phi(x) = \phi(r) \cdot 0 = 0$ לכן $rx \in \ker\phi$. באופן דומה גם $xr \in \ker\phi$ וסיימנו.

   (ב) הוכיחו כי $Im(\phi) = \{\phi(x) | \, x \in R_1\}$ הוא תת חוג של R_2 (כלומר הוא חוג ביחס לפעולות של R_2).
   פתרון : נוכיח $Im(\phi)$ תת חבורה ביחס לחיבור .
   1. סגירות: יהיו $\phi(x_1), \phi(x_2) \in Im(\phi)$ אזי $\phi(x_1) + \phi(x_2) = \phi(x_1 + x_2) \in Im(\phi)$.
   2. נטרלי: כיוון ש $\phi(0) = 0$ נקבל כי $0 = \phi(0) \in Im\phi$
   3. נגדי: יהא $\phi(x) \in Im\phi$. מתקיים כי $0 = \phi(0) = \phi(x-x) = \phi(x) + \phi(-x)$ ולכן $-\phi(x) = \phi(-x) \in Im(\phi)$

   נוכיח כי הכפל מוגדר (קיבוציות ופילוג מתקיימת כי זה תת קבוצה של R_2):
   יהיו $\phi(x_1), \phi(x_2) \in Im(\phi)$ אזי $\phi(x_1)\phi(x_2) = \phi(x_1 x_2) \in Im(\phi)$

4. משפט האיזומורפיזם הראשון לחוגים: יהיו R_1, R_2 חוגים ויהא $\phi : R_1 \to R_2$ הומומורפיזם של חוגים אזי $R_1/\ker\phi \cong Im(R_2)$.

   (א) יהא $\mathbb{F}$ שדה , $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ תת שדה שלו ו $a \in \mathbb{F}$. נגדיר $\phi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{F}$ ע"י $\phi(f) = f(a)$ (פונקציה זאת נקראת הומומורפיזם ההצבה). הוכיחו כי ϕ הומומורפיזם.
   פתרון : לכל $f, g \in \mathbb{K}[x]$ מתקיים כי
   1. $\phi(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \phi(f) + \phi(g)$
   2. $\phi(f \cdot g) = (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) = \phi(f)\phi(g)$

(ב) נתסכל על הומומורפיזם ההצבה הבא: $\phi;\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{R}$ המוגדר ע"י $\phi(f)=f(\sqrt{2})$ (שימו לב שזה דוגמא לסעיף הקודם). הוכיחו כי $Im(\phi)=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\left\{a+b\sqrt{2}|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ ומצאו $\hat{f}(x)\in\mathbb{Q}[x]$ כך ש $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\cong{}^{\mathbb{Q}[x]}/_{I(\hat{f})}$

פתרון : נשים לב כי $Im(\phi)=\left\{f(\sqrt{2})|\,f\in\mathbb{Q}[x]\right\}$ כיוון שלכל k טבעי מתקיים כי $\left(\sqrt{2}\right)^{2k}=2^k\in\mathbb{Q}$ וגם $\left(\sqrt{2}\right)^{2k+1}=2^k\sqrt{2}$ נקבל כי לכל פולינום $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ מתקיים $f(\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$ עבור $a,b\in\mathbb{Q}$ ולכן

$$Im(\phi)=\left\{f(\sqrt{2})|\,f\in\mathbb{Q}[x]\right\}=\left\{a+b\sqrt{2}|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$$

כנדרש. בנוסף. $\ker\phi=\left\{f\in\mathbb{Q}[x]|\,f(\sqrt{2})=0\right\}$. טענה: $\ker\phi=I(\hat{f}(x))$ עבור $\hat{f}(x)=x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$.

$(\subseteq)$ יהא $g\hat{f}\in I(\hat{f})$ אזי $g\hat{f}(\sqrt{2})=g(\sqrt{2})\cdot\hat{f}(\sqrt{2})=g(\sqrt{2})\cdot 0=0$ ולכן $g\hat{f}\in\ker\phi$.

$(\supseteq)$ יהא $f\in\ker\phi$ אזי $f(\sqrt{2})=0$ נבצע חילוק פולינומים ונקבל $f=q\hat{f}+r$ עבור $r\equiv 0$ או $\deg(r)<\deg(\hat{f})$. לכן $r=f-q\hat{f}$ ולכן

$$r(\sqrt{2})=f\left(\sqrt{2}\right)-q\left(\sqrt{2}\right)\hat{f}\left(\sqrt{2}\right)=0-q\left(\sqrt{2}\right)0=0$$

ומכאן ש $r=0$ כי אחרת דרגתו 0 או 1. כלומר $r(x)=c$ או $r(x)=ax+c$ עבור $a,c\in\mathbb{Q}$ אבל $\sqrt{2}$ אינו שורש של פולינומים כאלה.

לכן $f=q\hat{f}\in I(\hat{f})$.