# תרגיל 5 - אלגברה לינארית

14 באפריל 2018

**תרגיל 1**

תהי $A$ מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) אם $A+A^2$ הפיכה אז $A$ הפיכה.

ב) אם $A$ הפיכה אז $trace(A) \neq 0$

ג) אם $A^2 = A$ אז $A = I$ או $A$ אינה הפיכה

ד) אם ב-$A$ יש עמודת אפסים אז $A$ אינה הפיכה.

**תרגיל 2**

עבור המטריצות הבאות $A$ :

קבעו האם $A$ הפיכה.

אם כן אז :

* מצאו את $A^{-1}$

* הציגו את $A$ ואת $A^{-1}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**תזכורת: אם** $A$ **מטריצה הפיכה אזי למערכת** $Ax = b$ **יש פתרון יחיד והוא** $x = A^{-1}b$

ולכן בהיתנן מערכת משוואות, נבנה מטריצת המקדמים, נמצא את המטריצה ההופכית,

ואז נמצא את הפתרון

על ידי הכפלת וקטור הקבועים $b$ ב-$A^{-1}$ משמאל.

**תרגיל 3**

פתרו את מערכת המשוואות הבאות באמצעות מציאת מטריצה הופכית.

אם המטריצה המתאימה למערכת אינה הפיכה, פתרו באמצעות דירוג.

א)

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + 5z = 6 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

ב)

$$\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ 3x - 5y - z = 10 \end{cases}$$

**תרגיל 4**

אם למטריצה $A_{3\times 3}$ מתקיים: $R_1(A) + R_2(A) = R_3(A)$

כלומר במטריצה מגודל $3 \times 3$ השורה השלישית היא סכום של שתי השורות הראשונות.

הוכיחו:

1) וקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ אינו יכול לקיים את המשוואה $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**פתרון:**

נניח שוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כן מקיים את המשוואה אזי קיים $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ כך ש

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$(a_{11}+a_{21})\,x_1 + (a_{12}+a_{22})\,x_2 + (a_{13}+a_{23})\,x_3 = 0$$

נתבונן בשורה השלישית:

לאחר פתיחת הסוגריים נקבל:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 1 + 0 = 1 \neq 1$$

וזו סתירה.

2) איזה וקטור $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ יכול לקיים את המשוואה $Ax = b$?

**פתרון:**

לפי א' נקבל:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = b_1 + b_2$$

כלומר הוקטור הוא $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$

3) מה קורה לשורה 3 כאשר מדרגים את $A$? האם $A$ הפיכה? נמקו.

**פתרון:**

לאחר דירוג השורה השלישית מתאפסת.

**תזכורת: אם $A$ הפיכה אזי למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש רק פתרון האפס.**

כלומר אם למערכת $Ax = 0$ יש פתרון שונה מאפס אזי $A$ אינה הפיכה

**תרגיל 5**

נניח שבמטריצה $A_{3\times3}$ : $C_1(A) + C_2(A) = C_3(A)$

כלומר העמודה שלישית היא סכום של שתי העמודות הראשונות.

מצאו פתרון שונה מאפס של המשוואה $Ax = 0$ והסיקו מכך ש־$A$ אינה מטריצה הפיכה.

**פתרון:**
לאחר דירוג נקבל את המטריצה הבאה:

$$(**)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{11}a_{12} & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12} & a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12} \end{pmatrix}$$

אם השורות 2,3 אינן שורות אפסים אזי נחלק את השורה השנייה ב־$a_{11}a_{22}-a_{11}a_{12}$ ואת השורה השלישית ב־$a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}$
ונקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ולכן נחסיר את השורה שלישית מהשורה השנייה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש למערכת איסוף פתרונות, לנו מספיק למצוא אחד.

למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ פותר את המערכת.

אם לפחות אחת מהשורות של המערכת $(**)$ מתאפסת הוקטור שמצאנו עדיין מהווה פתרון.

**תרגיל 6**

הוכח ש־$A$ הפיכה אם $a \neq 0$ וגם $a \neq b$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

**פתרון:**
קל לראות שאם $a = 0$ אזי יש ב־$a$ שורת אפסים ולכן אינה שקולת שורה למטריצת היחידה ולכן אינה הפיכה.
לאחר דירוג נגיע למטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

אם $a-b=0$ נקבל שיש לצורה מודרגת של $A$ שתי שורות של אפסים ולכן אינה הפיכה.
אחרת $A$ הפיכה כי ניתן לדרג אותה למטריצה היחידה.

**תרגיל 7**

האם התתי־הקבוצות הבאות של המרחבים הוקטוריים המצויינים הן תתי המרחבים?

אם כן־הוכיחו. אם לר־נמקו או תנו דוגמא נגדית.

א) $\mathbb{R}^4 \supset \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{R} \right\} = W$

**פתרון:**

זה אכן תת מרחב:

אפס שייך אליו, נבחר $a=b=0$

נבדוק סגירות לסכום וכפל בסקלר:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ b_1 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 \\ b_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1+\alpha b_1+a_2+b_2 \\ \alpha b_1+b_2 \\ \alpha a_1+a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

ומכאן

ב) $\mathbb{R}^3 \ni \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a+b+c=0 \right\} = W$

**פתרון:**

זה אכן תת מרחב:

ברור ש־$a=b=c=0$ מקיימים את המשוואה $a+b+c=0$ ולכן אפס נמצא ב־$W$

נבדוק סגירות תחת סכום וכפל בסקלר:

יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ כך ש־$a_1+b_1+c_1=0$ וגם $a_2+b_2+c_2=0$,

ותהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(*)$ $\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1+a_2 \\ \alpha b_1+b_2 \\ \alpha c_1+c_2 \end{pmatrix}$ נבדוק אם וקטור $(*)$ נמצא ב־$W$:

$$\alpha a_1+a_2+\alpha b_1+b_2+\alpha c_1+c_2 = \alpha\left(a_1+b_1+c_1\right)+\left(a_2+b_2+c_2\right)=0$$

ולכן זהוא אכן תת מרחב

ג) $\mathbb{R}^3 \supset \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a \geq 0 \right\}$

**פתרון:**

לא תת מרחב:

נראה שהוא אינו סגור תחת כפל בסקלר:

נבחר $\alpha = -1$ ו־ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ולכן $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha v$ אינו נמצא בתת מרחב