חשבון אינפי 2
תרגיל 10 - פתרון
פונקציות מ $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$: תחום הגדרה, חישוב גבולות, רציפות,
נגזרות חלקיות . נגזרות מכוונות, מישור משיק, דיפרנציאביליות, נקודות קיצון מקומי

1. שרטטו את תחום ההגדרה של פונקציות הבאות :

א. $f(x,y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$

פתרון :

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$$

(עיגול עם מרכז ב $(0,0)$ ורדיוס 1) .

ב. $f(x,y)=xe^{-\sqrt{y+2}}$

פתרון :

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le -2\right\}$$

(חלק של המישור מעל הקו $y=-2$) .

2. חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו כי אינם קיימים :

א. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin\frac{y}{x}$

פתרון :

$$\lim_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\sin\frac{y}{x} \underset{\uparrow}{=} 16\sin\frac{\pi}{4}=8\sqrt{2}$$

הצבנו בגלל רציפות הפונקציה $x^2\sin\frac{y}{x}$

בנקודה $(4,\pi)$.

ב. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$

פתרון :

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{3x-2y}{2x-3y}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{3x-2y}{2x-3y}=\frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$ הגבול הנתון **אינו** מתקיים .

ג. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

פתרון :

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1\\ &\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0$$

ד. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy-y^2}}$

פתרון :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy-y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{(x-y)^2}}$$

$$\lim_{\substack{t\to0\\ t=x-y}} e^{-\frac{|t|}{t^2}} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to0^+} e^{-\frac{|t|}{t^2}} &= \lim_{t\to0^+} e^{-\frac{1}{t}} = 0 \\ \lim_{t\to0^-} e^{-\frac{|t|}{t^2}} &= \lim_{t\to0^+} e^{\frac{1}{t}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to0} e^{-\frac{|t|}{t^2}} = 0$$

3. חשבו את הגבולות החוזרים

א. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

פתרון :

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

ב. $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

האם הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ קיים ?

פתרון :

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x=y\\ x\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ הגבול הכפול **אינו** קיים .

4. חשבו את הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{|x|+|y|}\cos\dfrac{1}{y^2}$.

פתרון :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2}$$

$$0 \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2}\right| \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right|$$

$$\le \left|\frac{x^2}{|x|}\right| = |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2} = 0$$

האם הגבולות החוזרים קיימים ?

א. $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2}$

פתרון :

$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2} =$ אינו קיים

ב. $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2}$

פתרון :

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\frac{1}{y^2} = 0$$

5. בדקו את רציפות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן :

א.
$$f(x,y)=\begin{cases} \arctan\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(0,1) \\ \frac{\pi}{2} & (x,y)=(0,1) \end{cases}$$

פתרון :

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \arctan\frac{x^2+1}{\underbrace{x^2+(y-1)^2}_{\to\infty}} = \frac{\pi}{2} = f(0,1)$$

$\Leftarrow$הפונקציה רציפה בנקודה $(0,1)$

בשאר הנקודות הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות .

ב.
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

פתרון :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

ניקח $x=y\to 0$

$$\lim_{x=y\to 0} f\left(x,y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1\neq 0$$

$\Leftarrow$ הפונקציה <u>אינה</u> רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

6. האם קיים ערך של a עבורו הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$?

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ a & x^2+y^2=0\end{cases}$$

פתרון :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$$

$$0\leq\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{y^2}\right|=|x|+|x|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=0$

$\Leftarrow$ עבור $a=0$ הפונקציה $f\left(x,y\right)$ רציפה .

7. הוכיחו כי הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{2x^6+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\end{cases}$$

אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$, אך יש לה נגזרות חלקיות בנקודה זו .

פתרון :

א. נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $\left(0,0\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{2x^6+y^2}$$

$$\lim_{\substack{y=x^3\\ x\to 0}} f\left(x,y\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{3x^6}=\frac{1}{3}\neq 0$$

$\Leftarrow$ $f\left(x,y\right)$ אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

ב. נבדוק את קיום הנגזרות החלקיות בנקודה $\left(0,0\right)$

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$$

$$f_y\left(0,0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0,t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$$

8. חשבו נגזרת של פונקציה $f\left(x,y\right)=x\sin\left(x+y\right)$ בכיוון של וקטור $\vec{h}=\left(-1,0\right)$ בנקודה $a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

פתרון :

הפונקציה $f\left(x,y\right)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ (בפרט בנקודה $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$) כהרכבה וכפל של פונקציות רציפות וכן הנגזרות החלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^2$ (בפרט בנקודה $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$).

$$f_x=\sin\left(x+y\right)+x\cos\left(x+y\right)$$

$$f_y=x\cos\left(x+y\right)$$

ולכן $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$ (בפרט בנקודה $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$) , ולכן ניתן להשתמש במשפט האומר :

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\nabla f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\bullet\left(-1,0\right)$$

$$\left\|\vec{h}\right\|=1$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

$$f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial h}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\left(1,0\right)\bullet\left(-1,0\right)=-1$$

9. מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+2y^2+3z^2=6$ בנקודה $(1,-1,1)$.

פתרון :

נגדיר $f\left(x,y,z\right)=x^2+2y^2+3z^2-6$

משוואת המישור המשיק למשטח $f\left(x,y,z\right)=0$ בנקודה $\left(1,-1,1\right)$ היא :

$$f_x\left(1,-1,1\right)\left(x-1\right)+f_y\left(1,-1,1\right)\left(y+1\right)+f_z\left(1,-1,1\right)\left(z-1\right)=0$$

$$f_x\left(1,-1,1\right)=2x\big|_{(1,-1,1)}=2$$

$$f_y\left(1,-1,1\right)=4y\big|_{(1,-1,1)}=-4$$

$$f_z\left(1,-1,1\right)=6z\big|_{(1,-1,1)}=6$$

$$\Rightarrow 2\left(x-1\right)-4\left(y+1\right)+6\left(z-1\right)=0$$

$$2x-4y+6z=12$$

$$\boxed{x-2y+3z=6}$$

10. מצאו נקודה על המשטח $z=3x^2-y^2$ שבה המישור המשיק למשטח מקביל למישור $6x+4y-z=5$.

פתרון :

משוואת המישור המשיק למשטח $z=3x^2-y^2$ בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ היא :

$$6x_0\left(x-x_0\right)-2y_0\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0$$

מישור זה צריך להיות מקביל למישור $6x+4y-z=5$.

וקטור נורמל למישור המשיק הוא $\left(6x_0,-2y_0,-1\right)$. על מנת שהמישור המשיק יהיה מקביל למישור $6x+4y-z=5$, וקטורי הנורמל של שני המישורים צריכים להיות מקבילים , ז"א

$$\left(6x_0,-2y_0,-1\right)=\lambda\left(6,4,-1\right)$$

$$\begin{cases}6x_0=6\lambda\\ -2y_0=4\lambda\\ -1=-\lambda\end{cases}\qquad \lambda=1\Rightarrow x_0=1,y_0=-2\Rightarrow z_0=3x_0^2-y_0^2=-1$$

בנקודה $\left(1,-2,-1\right)$ המישור המשיק למשטח $z=3x^2-y^2$ מקביל למישור $6x+4y-z=5$.

11. האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות בנקודה $\left(0,0\right)$?

א. $f\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

פתרון :

$f\left(x,y\right)$ רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$ כהרכבה של פונקציות רציפות

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{t^3}}{t}=1$$

$$f_y\left(0,0\right)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(0,t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=1$$

$f\left(x,y\right)$ תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$ אם מתקיים :

$$f\left(h_1,h_2\right)-f\left(0,0\right)=f_x\left(0,0\right)h_1+f_y\left(0,0\right)h_2+o\left(\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}\right)$$

$$\sqrt[3]{h_1^{\,3}+h_2^{\,3}}=h_1+h_2+o\left(\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}\right)$$

צריך לבדוק האם :

$$\lim_{\left(h_1,h_2\right)\to\left(0,0\right)}\frac{\sqrt[3]{h_1^{\,3}+h_2^{\,3}}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}=0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\underset{n\to\infty}{\to}\left(0,0\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2\frac{1}{n^3}}-2\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n}-\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq0$$

$\Leftarrow$ הפונקציה $f\left(x,y\right)$ אינה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$.

ב. $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

פתרון :

נבדוק את רציפות הפונקציה $f\left(x,y\right)$ בנקודה $\left(0,0\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x=y\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \neq 0$$

$\Leftarrow$ הפונקציה $f\left(x,y\right)$ אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$ ולכן אינה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$.

12. תהי

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right) \\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

א. האם $f\left(x,y\right)$ רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$?

פתרון :

נבדוק את הרציפות בנקודה $\left(0,0\right)$

$$\lim_{\substack{x=y^2 \\ y\to 0}} \frac{2y^4}{2y^4} = 1 \neq 0$$

$\Leftarrow$ $f\left(x,y\right)$ אינה רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$.

ב. האם לכל ווקטור $\vec{h}$ כך ש $\|h\|=1$ קיימת נגזרת מכוונת $\frac{\partial f}{\partial h}\left(0,0\right)$?

פתרון :

יהי $\vec{h}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$ $0\le\theta\le 2\pi$, $\left\|\vec{h}\right\|=1$ נחשב את $\frac{\partial f}{\partial h}\left(0,0\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(0,0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(t\cos\theta,t\sin\theta\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{2t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad \forall\theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

עבור $\theta=\frac{\pi}{2}$ נקבל $\vec{h}=(0,1) \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0,t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$

ועבור $\theta=\frac{3\pi}{2}$ נקבל $\vec{h}=(0,-1) \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0,-t\right)-f\left(0,0\right)}{t}=0$

$\Leftarrow$ לכל וקטור $\vec{h}$, כך ש $\left\|\vec{h}\right\|=1$ הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial h}\left(0,0\right)$ קיימת .

ג. האם $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$?

פתרון :

$f\left(x,y\right)$ אינה דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$ כי היא לא רציפה בנקודה זו .

13. מצאו את נקודות הקיצון המקומי של הפונקציות הבאות :

א. $u\left(x,y\right)=3\left(x^2+y^2\right)+x^3+4y$

פתרון :

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} u'_x = 6x - 3x^2 = 0 \\ u'_y = 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow \left(0,-\frac{2}{3}\right),\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ נקודות חשודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yz} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

- נבדוק את הנקודה $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$:

$$\Delta_1\left(0,-\frac{2}{3}\right) = 6 > 0$$

$$\Delta_2\left(0,-\frac{2}{3}\right) = 36 > 0$$

$\Leftarrow \left(0,-\frac{2}{3}\right)$ נקודת מינימום מקומי .

- נבדוק את הנקודה $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$:

$$\Delta_1\left(2,-\frac{2}{3}\right) = -6 < 0$$

$$\Delta_2\left(2,-\frac{2}{3}\right) = -36 < 0$$

$\Leftarrow$ אין קיצון בנקודה $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$

ב. $u(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

פתרון :

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} u_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ u_y = 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow (0,0),\left(-\frac{5}{3},0\right),(-1,2),(-1,-2)$ נקודות חשודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yz} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix}$$

- נבדוק את הנקודה $(0,0)$:

$$\Delta_1(0,0) = 10 > 0$$

$$\Delta_2(0,0) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ נקודת מינימום מקומי .

- נבדוק את הנקודה $\left(-\frac{5}{3},0\right)$:

$$\Delta_1\left(-\frac{5}{3},0\right)=-10<0$$

$$\Delta_2\left(-\frac{5}{3},0\right)=\begin{vmatrix}-10 & 0\\ 0 & -10/3+2\end{vmatrix}=\frac{40}{3}>0$$

$\Leftarrow$ $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ נקודת מקסימום מקומי .

- נבדוק את הנקודה $(-1,2)$:

$$\Delta_1(-1,2)=-2<0$$

$$\Delta_2(-1,2)=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-16<0$$

$\Leftarrow$אין קיצון בנקודה $(-1,2)$, ז"א $(-1,2)$ נקודת אוכף .

- נבדוק את הנקודה $(-1,-2)$:

$$\Delta_1(-1,-2)=-2<0$$

$$\Delta_2(-1,-2)=\begin{vmatrix}-2 & -4\\ -4 & 0\end{vmatrix}=-16<0$$

$\Leftarrow$אין קיצון בנקודה $(-1,-2)$.

בהצלחה במבחנים!!