פתרון תרגיל 1

.1

הוכיחו או הפריכו:

א. אם קיים מקסימום לקבוצה, אז הוא יחיד

תשובה: הטענה נכונה.

הוכחה: תהי A קבוצה. ונניח בשלילה שקיימים $a \neq b$ כך ש- $\max A = a$ ו- $\max A = b$. לפי הגדרת המקסימום לכל $x \in A$ מתקיים $x \leq a$ וגם $a \in A$ וכן $x \leq b$ ו- $b \in A$ ולכן $b \leq a$ וגם $a \leq b$ ומכאן $a = b$ סתירה להנחה.

ב. אם לקבוצה S יש מינימום, אז לכל $c > 0$ ממשי לקבוצה $cS = \left\{ cs \middle| s \in S \right\}$ יש מינימום והוא $c \cdot \min S$.

תשובה: הטענה נכונה.

יהי $x \in S$ כך ש- $s = \min S$. לפי הגדרת המינימום לכל $x \in S$ מתקיים $x \geq s$, לפי הנתון $c > 0$ ולכן לכל $x \in S$ מתקיים $cx \geq cs$ ולכן $\min cS = c \cdot s = c \cdot \min S$ כדרוש.

ג. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות, אזי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

תשובה: הטענה נכונה.

הוכחה: לכל $x \in S \cup T$ מתקיים $x \in S$ או $x \in T$,

אם $x \in S$ אז $x \leq \sup S$,

אם $x \in T$ אז $x \leq \sup T$,

$\sup S \leq \max\{\sup S, \sup T\}$ וגם $\sup T \leq \max\{\sup S, \sup T\}$ ולכן לכל $x \in S \cup T$ מתקיים $x \leq \max\{\sup S, \sup T\}$.

$\Leftarrow$ $\max\{\sup S, \sup T\}$ הוא חסם מלעיל. כדי להוכיח שהוא חסם מלעל הקטן ביותר, נניח בה"כ ש- $\max\{\sup S, \sup T\} = \sup S$ ונניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in S \cup T$ $x < \sup S - \varepsilon$

היות ו- $S \subseteq S \cup T$ $x \in$ נקבל שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $x < \sup S - \varepsilon$. וזאת סתירה להגדרת סופרימום.

ד. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות, אזי $\inf(S \cap T) = \min\{\inf S, \inf T\}$.

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$$S = \{-1, 1, 2\}$$
$$T = \{1, 2\}$$
$$S \cap T = \{1, 2\}$$
$$\inf S = -1$$
$$\inf T = 1$$
$$\inf\{S \cap T\} = 1 \neq \min\{-1, 1\}$$

ה. תהי S קבוצה חסומה ולא ריקה ונניח ש- $0 \notin S$. נגדיר $T := \left\{ \frac{1}{s} \middle| s \in S \right\}$, אזי $\inf T = \frac{1}{\sup S}$.

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$$S=\{-2,3,4\}$$
$$\Rightarrow T=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$$
$$\inf T=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{\sup S}=\frac{1}{4}$$

ו. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות של ממשיים, אזי $\inf\left(\{s\cdot t|s\in S,t\in T\}\right)=\inf S\cdot\inf T$

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$$S=\{-1,-2,-3\}$$
$$T=\{1,2,3\}$$
$$\inf\left(\{s\cdot t|s\in S,t\in T\}\right)=-3\cdot 3=\inf S\cdot\sup T$$

ז. תהיינה S ו-T קבוצות חסומות ולא ריקות של ממשיים, אזי $\sup\left(\{s\cdot t|s\in S,t\in T\}\right)=\sup S\cdot\sup T$

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$$S=\{-1,-2,-3\}$$
$$T=\{1,2,3\}$$
$$\sup\left(\{s\cdot t|s\in S,t\in T\}\right)=-1\cdot 1=\sup S\cdot\inf T$$

.2

תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות חסומות ולא ריקות. מצאו $\inf$ ו- $\sup$ של הקבוצות הבאות:

א. $A-B=\{a-b|a\in A,b\in B\}$

תשובה:

$$\sup(A-B)=\sup A-\inf B$$
$$\inf(A-B)=\inf A-\sup B$$

נוכיח ש- $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$.

לכל $a\in A$ מתקיים $a\le\sup A$ וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $a_1\in A$ כך ש- $a_1\ge\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$

לכל $b\in B$ מתקיים $-b\le-\inf B$ וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $b_1\in B$ כך ש- $b_1\le\inf B+\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן

$$-b_1\ge-\inf B-\frac{\varepsilon}{2}$$

מכאן לכל $x\in A-B$ מתקיים $x=a-b\le\sup A-\inf B$ וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A-B$ כך ש- $x=a_1-b_1\ge\sup A-\inf B-\varepsilon$.

באופן דומה מוכיחים ש- $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$

ב. $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$

תשובה :

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$
$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$$

הוכחה דומה לסעיף א'.