

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר.

יש להשתדל לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 25 נקודות.

1. אם $\alpha(s)$ היא עקומה רגילה ב- \mathbb{R}^3 עם פרמטריזציה לפי אורך קשת, ו- $\hat{n}(s)$ מסמן את הנורמל העיקרי בנקודה s של העקומה, מצא את התבניות היסודיות הראשונה והשנייה של המשטח

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\hat{n}(s)$$

נכון או לא נכון: אם $\alpha(s)$ היא עקומה מישורית (כלומר, נמצא במישור), גם המשטח x נמצא באותו מישור.

2. (א) מה הן הנקודות האליפטיות, ההיפרבוליות, הפרבוליות והמישוריות של משטח ?

(ב) נכון או לא נכון: אם למשטח יש נקודות היפרבוליות ונקודות אליפטיות, אזי בהכרח יש נקודות שהן או פרבוליות או מישוריות.

(ג) מה הוא התנאי שנקודה (u^1, u^2) של גרף

$$x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

תהיה היפרבולית ?

(ד) מצא גרף כך שיש לו גם נקודות היפרבוליות וגם נקודות אליפטיות.

3. (א) מה הן קואורדינטות איזותרמיות עבור משטח ?

(ב) הוכח שאם עובדים בקואורדינטות איזותרמיות אזי ניתן לכתוב את העיקום הממוצע של משטח בצורה

$$H = \frac{L_{11} + L_{22}}{2g_{11}}$$

כאשר, כרגיל, $g_{\alpha\beta}$ ו- $L_{\alpha\beta}$ מסמנים את הרכיבים של התבניות היסודיות הראשונה והשנייה.

(ג) הוכח גם שאם עובדים בקואורדינטות איזותרמיות אזי ניתן לכתוב את העיקום הנורמלי בנקודה $t = 0$ של העקומה

$$(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)$$

(כאן a, b, θ קבועים) בצורה

$$\kappa_n(\theta) = \frac{L_{11}(a, b) \cos^2 \theta + L_{12} \sin \theta \cos \theta + L_{22}(a, b) \sin^2 \theta}{g_{11}(a, b)}$$

(ד) מהתוצאות של הסעיפים הקודמים הוכח ש-

$$H(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_n(\theta) d\theta$$

4. (א) מה הוא היחס בין העיקום הנורמלי, העיקום הגאודזי והעיקום השלם של עקומה על משטח? העזר ביחס זה למצוא, עד לכפל על ידי -1 , את העיקום הגאודזי של קו רוחב (מעגל עם θ קבוע) על הספרה (הכדור) בעל רדיוס 1.

(ב) הוכח שבאופן כללי למשטח עם פרמטריזציה $x(u^1, u^2)$ העיקום הגאודזי בנקודה $t = 0$ של העקומה $(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) = (a, b + t)$, כאשר a, b קבועים, ניתן על ידי

$$\frac{\sqrt{\det g(a, b)} \Gamma_{22}^1(a, b)}{g_{22}(a, b)}$$

(ג) העזר בנוסחה של סעיף (ב) לבדוק את התשובה שמצאת בסעיף (א) לעיקום הגאודזי של קו רוחב.