1. משפט: תהא $T : V \to W$ ה"ל ותהא A תת קבוצה של V. אזי $T\left[span\left(A\right)\right] = spanT[A]$

פתרון: ראשית, נשים לב ש$T[A] \subseteq W$ ולכן $spanT[A] \leq W$.
$A \subseteq V$ ולכן $span(A) \leq V$. ולכן $T[span(A)] \subseteq W$.
$\subseteq$: יהי

$$w \in T[span(A)]$$

$$\Downarrow$$

$$\exists v \in span(A) : T(v) = w$$

$$\Downarrow$$

$$v = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, a_i \in A$$

$$\Downarrow$$

$$T(\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) = w$$

$$\Downarrow$$

$$w = \Sigma \alpha_i T(a_i)$$

w הוא צירוף לינארי של הוקטורים $T(a_i)$, שייכים ל$T[A]$. לכן מהגדרה $w \in spanT[A]$.
$\supseteq$: יהי

$$w \in spanT[A]$$

$$\Downarrow$$

$$\exists v_1, .., v_n \in T[A] : w = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha v_i$$

לכן i, $v_i = T(a_i)$ כך ש$a_i \in A$.

$$w = \Sigma \alpha_i T(a_i)$$

$$\Downarrow$$

$$w = T(\Sigma \alpha_i a_i)$$

נשים לב ש$\Sigma \alpha_i a_i \in span(A)$. ולכן $w \in T[span(A)]$.

2. מסקנה: תהי $T:V\to W$. אם אנחנו רוצים לחשב את התמונה של T, כלומר ImT, ידוע ש

$$ImT=T[V]$$

נבחר איזשהו בסיס לV, $v_1,...,v_n$.

$$T[V]=T[span\{v_1,...,v_n\}]=span\{T[\{v_1,...,v_n\}]=$$

$$span\{T(v_1),...,T(v_n)\}$$

במילים: נבחר בסיס לW. נחשב את התמונות של איברי הבסיס. ונעשה $span$ לקבוצה שמתקבלת.

3. דוגמא:

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

מה התמונה ומה הגרעין של ההעתקה?
פתרון: נבחר בסיס

$$e_1,e_2$$

$$T(e_1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ImT=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

אפשר לראות שהם בת"ל ולכן המימד של התמונה הוא 2. ואם נרצה למצוא את התמונה בצורה מפורשת אז נעביר למשוואות.
גרעין: יש 2 דרכים. דרך אחת: ממשפט הדרגה.

$$\dim ImT+\dim\ker T=\dim V$$

במקרה שלנו :

$$2 + \dim\ker T = 2$$

לכן $\dim\ker T = 0$. כלומר, הגרעין הוא רק וקטור ה0.
דרך נוספת : לפתור את המשוואה

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זה נותן מערכת משוואות הומוגנית עם 3 משוואות ו2 נעלמים.

4. נגדיר $T : \mathbb{R}^{2\times3} \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת $T(A) = \sum_{j=1}^{3} C_j(A)$ מצאו בסיס ל ImT ול $\ker T$.
פתרון : יש בסיס ל$\mathbb{R}^{2\times3}$ שמוגדר ע"י המטריצות $e_{i,j}$ המטריצות שבמקום הi,j יש 1 ובכל השאר 0.

$$T(e_{1,1}) = T(e_{1,2}) = T(e_{1,3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(e_{2,1}) = T(e_{2,2}) = T(e_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ImT = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

דרך נוספת היא להראות ישירות שלכל וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ יש מקור, למשל המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

גרעין :

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_4 + x_5 + x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, קבילנו מערכת הומוגנית, עם 2 משוואות ו6 נעלמים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

יש 4 נשתנים חופשיים. נציב

$$x_2 = t_1, x_3 = t_2, x_5 = t_3, x_6 = t_4$$

$$x_1 = -t_1 - t_2, x_4 = -t_3 - t_4$$

$$\begin{pmatrix} -t_1 - t_2 & t_1 & t_2 \\ -t_3 - t_4 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

בסיס:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

דרך נוספת: ממשפט הדרגה ניתן להסיק שהממד של הגרעין הוא 4. אם אתם מצליחים למצוא לבד 4 וקטורים בת"ל בגרעין- סיימתם.

5. יהא $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ ונגדיר $U = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. האם קיימת T כך ש:

(א) $\ker T = U$ וגם $ImT = \mathbb{R}^2$

פתרון: לפי משפט הדרגה לא יכול להיות, כי נקבל ש

$$\dim\ker = 2 \dim ImT = 2 \dim V = 3$$

3=2+2 . לא נכון.

(ב) $\ker T = U$ וגם $ImT = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון: נשלים את $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ לבסיס. לוקטור השלישי נקרא v. לפי משפט ההגדרה נגדיר $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. ע"י

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, T(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

איך אפשר לדעת שהתמונה היא אכן מה שביקשו?

ידוע ש

$$ImT = span\{T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, T(v)\} = span\{0, 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

ואיך אפשר לדעת שהגרעין זה מה שביקשו?

ממשפט הדרגה אפשר להסיק שמימד הגרעין הוא 2. ($\dim V = 3$ ו$\dim ImT = 1$).

בנוסף, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ הם וקטורים בת"ל בגרעין (כי אנחנו יודעים שהם הולכים ל0) . לכן

$$\ker T = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

דרך נוספת: המטריצה המייצגת תהיה בגודל 2×3.

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

מרחב העמודות שווה לתמונה. אז נשים עמודה אחת להיות $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. לפי הנתון ש$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ בגרעין, זה אומר שהם במרחב ה0 של המטריצה, וזה אומר שהעמודה הראשונה שווה לשלישית וגם העמודה השניה שווה לשלישית. אז המטריצה המייצגת תהיה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. תרגיל $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{pmatrix}$$

מצאו $[T]_C^B$ במקרים הבאים:

(א) $B = \{1, x, x^2\}\ C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב) $B = \{1, 1+x, 1+x^2\}\ C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T(1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},T(1+x)=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},T(1+x^2)=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$$

ג) $B=\{1,1+x,1+x^2\}\ C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

החלפנו את השורה השניה עם השלישית.

ד) $B=\{1,1+x,1+x^2\}\ C=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\right\}$

צריך למצוא

$$[T(b)]_C$$

צריך למצוא את המקדמים בצירוף:

$$T(1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$1=x+y+2z+w$$

$$0=2x+y+z-w$$

$$1=-x+y-z+2w$$

$$0=x+y+z+w$$

מוצאים את x,y,z,w וזה העמודה הראשונה של המטריצה. אח"כ עושים אותו דבר על $T(1+x)$ ועל $T(1+x^2)$.

צריך לפתור 3 מערכות משוואות שונות עם 4 משוואות ו4 נעלמים.

דרך לעשות את זה בבת אחת:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$$

ולפתור את המערכת באופן כללי.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&a\\2&1&1&-1&b\\-1&1&-1&2&c\\1&1&1&1&d\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{1}{3}(-4a-b-2c+7d)\\0&1&0&0&a+b+c-2d\\0&0&1&0&a-d\\0&0&0&1&\frac{1}{3}(-2a-2b-c+5d)\end{array}\right)$$

$$T(1+x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, T(1+x^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת תהיה:

$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

דרך שלישית:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

- מצאו בסיס ל $\ker T$ ול ImT.
  פתרון:

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן ניתן להסיק ש:

$$[\ker T]_B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker T=0+0x+0x^2$$

$$[ImT]_C=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$ImT = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

1. (תרגיל ממבחן) תהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ 2x+2y \end{pmatrix}$.

(א) מצאו בסיס לגרעין ולתמונה.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ImT = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

זה לא בסיס לתמונה. אפשר לראות שהוקטור השני הוא סכום של הראשון והשלישי.
בסיס:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

המימד של הגרעין הוא 1 לפי משפט הדרגה. דוגמא לוקטור בגרעין

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וזה בסיס לגרעין.

(ב) מצוא בסיס E כך ש

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$T(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 0$$

$$e_1 \in \ker T$$

$$T(e_2), T(e_3) \in span\{e_2, e_3\}$$

$$ImT \subseteq span\{e_2, e_3\}$$

אבל אנחנו יודעים שהמימדים שלהם 2 ולכן הם שווים.
לכן

$$e_2, e_3$$

הם בסיס לתמונה.
לכן נבחר

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$