מד"ר, תרגול 12

15 בינואר 2014

- תרגילים 10,11 יש להגיש עד ה23.01 לתא 12. התרגילים הבדוקים יהיו בחדר צילום בקומה 2.

תרגילים ממבחנים

תרגיל 1:

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{dy}{dx} = y - 2qxy^3$ כאשר q הוא קבוע חיובי. מצא את הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = -1$. האם פתרון זה מוגדר לכל x ממשי? אם כן, מהו $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$?

פתרון: משוואת ברנולי. נכתוב בצורה

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} - 2qx$$

ונציב $z = \frac{1}{y^2}$ לקבל

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} &= z - 2qx \\
\frac{dz}{dx} &= -2z + 4qx \\
z' + 2z &= 4qx \\
z(x) &= e^{-\int 2dx}\left(\int e^{\int 2dx}\cdot 4qxdx + c\right) \\
zx) &= e^{-2x}\left(4q\int e^{2x}xdx + c\right) \\
&= e^{-2x}\left(4q\left[x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right] + c\right) \\
&= e^{-2x}\left(2qxe^{2x} - qe^{2x} + c\right) \\
&= ce^{-2x} + q(2x-1) \\
y(x) &= \pm\sqrt{\frac{1}{ce^{-2x} + q(2x-1)}}
\end{aligned}$$

נציב $y(0)=1$ ונמצא את c:

$$\begin{aligned} y^2(0) &= 1=\frac{1}{c-q} \\ c-q &= 1 \\ c &= q+1 \\ y(x) &= =-\sqrt{\frac{1}{e^{-2x}+q(e^{-2x}+2x-1)}} \end{aligned}$$

שימו לב שיש לבחור סימן שלילי כי רוצים $y(0)=-1$. נשים לב ש-$e^{-2x}>0, q>0, e^{-2x}\geq -2x+1$ ולכן $e^{-2x}+q(e^{-2x}+2x-1)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ לכן $y(x)$ מוגדרת לכל x. מהנוסחה של $y(x)$ מקבלים

$$\lim_{X\to\infty} y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{\underbrace{e^{-2x}}_{\downarrow\atop 0}+q(\underbrace{e^{-2x}}_{\downarrow\atop 0}+\underbrace{2x}_{\downarrow\atop\infty}-1)}}=0$$

תרגיל:

למשוואה $y''+4y=2\tan x$ יש פיתרון פרטי $y(x)=-x\cos(2x)+\ln|\cos x|\cdot\sin 2x$. הראה איך מוצאים פתרון זה על ידי שיטת ווריאצית המקדמים, ומצא את הפתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=A, y'(0)=B$ כאשר A,B קבועים נתונים.

פתרון:

נפתור את החלק ההומוגני:

$$\begin{aligned} y''+4y &= 0 \\ r^2+4 &= 0 \\ r &= \pm 2i \\ y_1(x) &= \cos 2x \\ y_2(x) &= \sin 2x \end{aligned}$$

ווריאציית המקדמים: הפתרון הוא $y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ כאשר

$$\begin{matrix} c_1'y_1+c_2y_2=0 \\ c_1'y_1+c_2'y_2=f \end{matrix}\qquad \begin{cases} c_1'\cos 2x+c_2'\sin 2x &= 0 \\ -2c_1'\sin 2x+2c_2'\cos 2x &= 2\tan x \end{cases}$$

$$c_1'=-2\sin^2 x, c_2'=\tan x\cos 2x$$

ולכן

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int(1-\cos 2x)dx = -x+\frac{1}{2}\sin 2x + k_1 \\ c_2(x) &= \int \tan x(2\cos^2 x-1)dx \\ &= (\sin 2x - \tan x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(\cos 2x + \ln|\cos x|) + k_2 \end{aligned}$$

מזה, עם $k_1 = k_2 = 0$ נקבל את הפתרון המבוקש.

$$\begin{aligned} y(x) &= (-x+\frac{1}{2}\sin 2x)\cos 2x + \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \ln|\cos x|\right)\sin 2x \\ &= -x\cos 2x + \sin 2x \ln|\cos x| \end{aligned}$$

אנחנו יודעים ש$y(0)=0$ו־ $y'(0)=-1$. אז נשאר לנו לפתור

$$\begin{cases} k_1\cos(2\cdot 0) + k_2\sin(2\cdot 0) = A \\ -k_1\cdot 2\sin(2\cdot 0) + 2k_2\cos(2\cdot 0) = B+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_1 = A, k_2 = \frac{B+1}{2}$$

$$y(x) = -x\cos 2x + \ln|\cos x|\cdot\sin 2x + A\cos 2x + \frac{1}{2}(B+1)\sin 2x$$

תרגיל:

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y'' - 2y' + (1+p^2)y = e^x + e^{-x}$$

כאשר p הוא קבוע חיובי.

2. מצא את הפתרון הפרטי של המשוואה בסעיף (א) המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = y'(0) = 0$.

3. ע"י חישוב הגבול כאשר $p \to 0$ של התשובה לסע' (ב) או אחרת, פתור את הבעיה $y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}, y(0) = y'(0) = 0$

פתרון:

1. קודם כל נפתור את הבעיה ההומוגנית:

$$\begin{aligned} y_k'' - 2y_k' + (1+p^2)y_k &= 0 \\ r^2 - 2r + (1+p^2) &= 0 \\ (r-1)^2 + p^2 &= 0 \\ r_{1,2} &= 1 \pm pi \\ y_1(x) &= e^x\left(c_1\cos px + c_2\sin px\right) \end{aligned}$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ae^x + Be^{-x} \\ Ae^x + Be^{-x} - 2Ae^x + 2Be^{-x} + (1+p^2)Ae^x + (1+p^2)Be^{-x} &= e^x + e^{-x} \\ A = \frac{1}{p^2} \quad &, \quad B = \frac{1}{4+p^2} \end{aligned}$$

לכן מקבלים

$$y(x) = e^x(c_1 \cos px + c_2 \sin px) + \frac{1}{p^2}e^x + \frac{1}{4+p^2}e^{-x}$$

.2

$$y'(x) = e^x(c_1 \cos px + c_2 \sin px) + pe^x(-c_1 \sin px + c_2 \cos px) + \frac{e^x}{p} - \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

לכן התנאים $y(0) = y'(0) = 0$ נותנים:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4+p^2}, \quad 0 = c_1 + pc_2 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4+p^2} \\ c_1 = -\frac{4+2p^2}{p^2(4+p^2)} \quad &, \quad c_2 = \frac{2}{p(4+p^2)} \end{aligned}$$

והפתרון הוא:

$$y(x) = e^x \left(-\frac{4+2p^2}{p^2(4+p^2)} \cos px + \frac{2}{p(4+p^2)} \sin px \right) + \frac{e^x}{p} + \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

3. פתרון בשתי דרכים

(א) דרך א': נכתוב את $y(x)$ בצורה נוחה יותר:

$$y(x) = \frac{e^x}{4+p^2} \left(\frac{-(4+2p^2)\cos px + 2p \sin px + 4 + p^2}{p^2} \right) + \frac{e^{-x}}{4+p^2}$$

נשים לב שהמונה שווה ל־

$$\begin{aligned} -(4+2p^2)\left(1 - \frac{p^2x^2}{2} + \mathcal{O}(p^4)\right) + 2p(px + \mathcal{O}(p^3)) + e + p^2 \\ = p^2(2x^2 + 2x - 1) + \mathcal{O}(p^4) \end{aligned}$$

לכן כאשר נשאיף $p \to 0$ נקבל $y_p(x) \to \frac{e^x}{4}(2x^2 + 2x - 1) + \frac{e^{-x}}{4}$.

(ב) דרך ב': נרשום

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{e^x}{4+p^2}\left(\underbrace{\frac{4-4\cos px}{p^2}}_{\to 2x^2} -2\underbrace{\cos px}_{\to 1}+\underbrace{1}_{\to 1}+2\underbrace{\frac{\sin px}{p}}_{\to 1}\right)+\frac{e^{-x}}{4+p^2} \\
y_p(x) &\stackrel{p\to 0}{\to} \frac{e^x}{4}(2x^2+2x-1)+\frac{e^{-x}}{4}
\end{aligned}$$

טיפים למבחן

- המבחן 5 שאלות מתוך 6. אפשר לכתוב 6 ולקבל את 5 הטובות ביותר. לכן יש לנסות לפתור את כל השאלות
- המבחן בעיקר טכני ולכן אחרי שמסיימים את השאלות יש לבדוק היטב, להציב את הפתרון שקיבלנו במשוואה (אלמנטרי!) ולבדוק אם מתקיים. להציב אפילו פעמיים למניעת טעויות.
- לבדוק מה סדר המשוואה בכל שאלה: סדר ראשון, שני שלישי. אם משוואה מסדר ראשון ישנן מספר אפשרויות. יש לסדר את הקלסר לפי סדר ראשון, שני , מערכות וכו'.
- לדוג' עבור סדר ראשון יש ברנולי, לא הומוגנית לינארית, משוואה סתומה, הפרדת משתנים וכד'.
- משוואה מסדר שני: מקדמים קבועים, הומוגנית ולא הומוגנית. לא הומוגני: מנחשים פתרון ואם אין וריאצית המקדמים ($c_1(x), c_2(x)$).
- מקרים מתרגול 7־6 על משוואות מסדר גבוה (אם אין y, y') וכל ההצבות שניתן.
- משוואה שלא נמצאת באף אחד מהוסגים היא לפלס ולרוב בשאלה יבקשו לפלס.
- סוג נוסף: נתון פתרון פרטי ויש למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה (תרגיל 5־6 בשיעורי הבית). במקרה זה יש או להכפיל בz או $+z$. לרוב $\cdot z$.
- מערכות משוואות: האם הומוגנית ולפתרו בהתאם. לכסון, מציאת ע"ע וו"ע ולבחור מקרה מתאים.
- שטורם ליוביל: למצוא ע"ע שנותנים פתרון ל"ט.