<u>סימפלקס – דוגמא ואלגוריתם</u>

פונק' המטרה:

$$\max \ z = 3x_1 + 5x_2$$

אילוצים:

$$\begin{aligned} &\text{subject to:} \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

הבעיה בצורה החדשה היא:

$$\begin{aligned} \max \ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t:} & \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

1. כל משתנה בסיסי מופיע רק במשוואה שלו ולא באף אחת אחרת.
2. בודקים בשורה של z אם יש מקדמים שליליים. אם כן, נבחר את המשתנה עם המקדם השלילי ביותר (במינימום, החיובי ביותר) והוא יהיה המשתנה הנכנס לבסיס. אם יש שני ערכים זהים, הבחירה היא שרירותית.
3. לאחר שבחרנו משתנה נכנס, נסמן את העמודה שלו. נסתכל על המנה של אגף ימין חלקי המקדם בעמודה שסומנה (נמצא את ההגבלה על המשתנה הנכנס). נבחר את ההגבלה המינימלית וכך ייבחר המשתנה היוצא. (באיטרציה הראשונה שלנו, x_2 יוצא וx_4 נכנס).

פתרון באמצעות טבלה

איטרציה	משתנה בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	אגף ימין	יחס	מעבר לאיטרציה הבאה
0	z	1	-3	-5	0	0	0	0		$5R_3 + R_1 \to R_1$
	x_3	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{0}$ - אין הגבלה	$-2R_3 + R_4 \to R_4$
	x_4	0	0	1	0	1	0	6	$\frac{6}{1} = 6$	
	x_5	0	3	2	0	0	1	18	$\frac{18}{2} = 9$	
1	z	1	-3	0	0	5	0	30		$R_4 + R_1 \to R_1$
	x_3	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$	$-\frac{1}{3}R_4 + R_2 \to R_2$
	x_2	0	0	1	0	1	0	6	$\frac{6}{0}$ - אין הגבלה	$\frac{1}{3}R_4 \to R_4$
	x_5	0	3	0	0	-2	1	6	$\frac{6}{3} = 2$	
2	z	1	0	0	0	3	1	36		
	x_3	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2		
	x_2	0	0	1	0	1	0	6		
	x_1	0	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2		

והפתרון שקיבלנו הוא $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ z = 36$.

דואליות

לבעיה שניסחנו עד כה נקרא בעיה פרימלית. לכל בעיה פרימלית ניתן לנסח בצורה מקבילה בעיה התיקרא בעיה דואלית. הבעיה הפרימלית מגיעה מהתחום האפשרי (עוברת על פתרונות תת-אופטימליים ומגיעה בסוף לפתרון אופטימלי) ואילו הבעיה הדואלית מגיעה מהתחום הלא אפשרי (כלומר עוברת על פתרונות על-אופטימליים ומגיעה בסוף לפתרון אופטימלי).

הצגת בעיה פרימלית הינה מהצורה:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t} &: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \\ & i = 1, ..., m \\ & x_j \ge 0 \end{aligned}$$

הגדרה

הבעיה הדואלית לפרימלית הנ"ל היא:

$$\begin{aligned} \min\ w &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.t} &: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \\ & j = 1, ..., n \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

בבעיה הדואלית, מספר האילוצים הוא כמספר המשתנים בבעיה הפרימלית ולהפך.

דוגמה

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t} &: x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לבעיה זו היא:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 4y_1 + 6y_2 + 18y_3 \\ \text{s.t} &: y_1 + 3y_3 \ge 3 \\ & y_2 + 2y_3 \ge 5 \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

נניח שיש לנו בעיה, עם 2 משתנים ו20 אילוצים. הבעיה הדואלית תכלול שני אילוצים ו20 משתנים. בבעיה הדואלית טבלת הסימפלקס תכלול כ$44 = 2 \cdot 22$ תאים בעוד שבבעיה הפרימלית הטבלה תכלול כ$440 = 20 \cdot 22$ תאים ולכן יהיה פשוט יותר לחשב את הבעיה הדואלית.

הצגה מטריציאלית

בעיה (1):

$$\begin{aligned} \max\ z &= cx \\ \text{s.t} &: Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לה (2):

$$\begin{aligned} \min\ w &= yb \\ \text{s.t} &: yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} c &= (c_1, ..., c_n) \\ b &= (b_1, ..., b_m) \\ x &= (x_1, ..., x_n) \\ y &= (y_1, ..., y_m) \end{aligned}$$

ו-A מטריצת המקדמים.

1 משפט הדואליות החלשה

אם x פתרון אפשרי ל(1) ו-y פתרון אפשרי ל(2), אזי:

$$cx \leq yb$$

כלומר, כל פתרון אפשרי של בעיית מקסימום מהווה חסם תחתון של בעיית מינימום.

2 משפט הדואליות החזקה

אם x פתרון אפשרי ל(1) ו-y פתרון אפשרי ל(2) כך שמתקיים

$$cx = yb$$

אזי x אופטימלי ל(1) ו-y אופטימלי ל(2).

משפט החוק המשלים Complementary Slackness

אם בפתרון האופטימלי ל(1) משתנה חוסר x^*_{n+i} באילוץ ה-i שונה מ-0, אזי המשתנה הדואלי המתאים לו בפתרון האופטימלי $y^*_i = 0$.
ולהפך - אם המשתנה הדואלי האופטימלי $y^*_i \neq 0$ אזי משתנה החוסר האופטימלי x^*_{n+i} באילוץ ה-i יהיה שווה 0.

משפט ההברות (החוק המשלים)

בבעיה פרימלית: $(\underbrace{X_1,\dots X_n}_{\text{משתני החלטה של P}}, \underbrace{S_1,\dots,S_m}_{\text{משתני סרק של P}})$

בבעיה דואלית: $(\underbrace{y_1,\dots,y_m}_{\text{משתני החלטה של D}}, \underbrace{R_1,\dots,R_n}_{\text{משתני סרק של D}})$

R_i מס' $= X_i$ מס'

y_j מס' $= S_j$ מס'

אם S בבסיס, y המתאים בטוח שלא. או s או y יהיו בבסיס. או R או X יהיו בבסיס. לעולם לא שניהם.

$S_i \cdot y_i = 0$

$R_j \cdot X_j = 0$

<u>דוגמא:</u>

פתרון סופי של בעיה פרימלית:

max:

בסיס	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
Z	1	$4/3$	0	$1/3$	0	$2/3$	$\frac{160}{3}$
S_1	0	2	0	1	1	-1	20
X_2	0	$2/3$	1	$5/3$	0	$1/3$	$20/3$

מהפתרון הפרימלי נמצא את הטבלה הסופית של הבעיה הדואלית:

שני משתני סרק ב-P ⇐ שני משתני החלטה ב-D

3 משתני החלטה ב-P ⇐ 3 משתני סרק ב-D

עפ"י יחסי ההברות S_1 נמצא בבסיס P לכן y_1 לא יהיה בבסיס הדואלי.

S_2 לא בבסיס ⇐ y_2 בבסיס.

נמשיך באופן דומה לגבי כל המשתנים.

min:

בסיס	W	y_1	y_2	R_1	R_2	R_3	RHS
W	1	-20	0	0	$-\frac{20}{3}$	0	$\frac{160}{3}$
y_2	0		1	0		0	$2/3$
R_1	0		0	1		0	$4/3$
R_3	0		0	0		1	$1/3$

<u>בפתרון אופטימלי: $W^* = Z^*$</u> זה משפט הדואליות החזק