אלגברה מופשטת - פתרון 1

שאלה 1

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$

לא – אין אסוציאטיביות.

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$

לא – אין אסוציאטיביות.

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$

לא – אין אסוציאטיביות.

שאלה 2

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: חבורה למחצה/ מונואיד/ חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית.

א. $(\mathbb{Z},\bullet)$ כאשר $a\bullet b=a+b+2$

זאת חבורה. איבר היחידה הוא $e=-2$, וההופכי של b הוא $-4-b$. הפעולה היא קומוטטיבית.

ב. $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$

כן מונואיד, לא חבורה (מכיוון שאפס לא הפיך). הפעולה היא קומוטטיבית.

ג. $(\mathbb{Z},-)$

הפעולה אינה אסוציאטיבית ולכן זאת לא חבורה למחצה. הפעולה אינה קומוטטיבית.

ד. $(Map(\mathbb{N},\mathbb{N}),\circ)$ כאשר $Map(\mathbb{N},\mathbb{N})=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}$

ראינו שזה מונואיד, וזאת לא חבורה מכיוון שלא כל פונקציה היא הפיכה. הפעולה אינה קומוטטיבית.

ה. $(P(X),\Delta)$, באשר X קבוצה כלשהי ו-Δ ההפרש הסימטרי המוגדר ע"י $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\cap B)$ לכל $A,B\in P(X)$.

זאת חבורה. אסוציאטיביות ידועה מבדידה. האיבר הנייטרלי הוא הקבוצה הריקה.וקל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה היא קומוטטיבית.

שאלה 3

א. תהי $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. על המכפלה הקרטזית $A\times A=\{(a,b)\mid a,b\in A\}$ נגדיר פעולה בינרית ע"י $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$, כאשר הפעולות באגף ימין הן חיבור וכפל מודולו 7.
(i) הוכיחו ש- $A\times A$ מונואיד קומוטטיבי.

(ii) האם כל איבר ב $A\times A$, פרט ל $(0,0)$, הוא הפיך ?

ב. אותה שאלה כמו בא', כאשר $A=\{0,1,2,3,4\}$ והפעולות הן מודולו 5.
(i) הוכח ש $A\times A$ מונואיד קומוטטיבי.

(ii) האם כל איבר ב $A\times A$, פרט ל $(0,0)$, הוא הפיך ?

פתרון

א. ניתן לבדוק בצורה ישירה כי הפעולה היא אסוציאטיבית וקומוטטיבית, וכי (1,0) הוא איבר יחידה. כל איבר פרט ל $(0,0)$ הוא הפיך. אכן, ההפכי של (a,b) הוא $\left(a\left(a^2+b^2\right)^{-1},-b\left(a^2+b^2\right)^{-1}\right)$ (שימו לב כי $\left(A^*,\ \bullet\ \right)$ הוא חבורה כפלית (מודולו 7), ולכן לכל איבר פרט לאפס יש הופכי) בדקו כי $a^2+b^2\neq 0$ לכל $(a,b)\neq(0,0)$ (זה לא נכון בהכרח בכל שדה, כפי שקורה בסעיף ב'). רצוי לעשות את השאלה הזו בכל מקרה – היא מראה את האנלוגיה למספרים המרוכבים (מה ההופכי של a+bi ב-$\mathbb{C}$?)

ב. ההוכחה שזהו מונואיד חילופי היא כמו בא', אך לא לכל איבר שונה מ 0 יש הפכי. למשל, ל- (1,2) אין הפכי.

שאלה 4

האם $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת

כפל מטריצות)?

פתרון

ניתן לבדוק על פי בדיקה ישירה שזו חבורה.

אלגברה מופשטת 1
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג
מרצה: פרופסור עוזי וישנה

<u>שאלה 5</u>

א. הוכיחו: אם בחבורה למחצה יש יחידה מימין e ויחידה משמאל e' אזי $e = e'$.

ב. בחבורה למחצה S יש 7 יחידות משמאל. כמה יחידות מימין יש בה?

<u>פתרון</u>

א. מתקיים $e' = e'e = e$.

ב. אפס. הסבר: נניח בשלילה שיש לפחות יחידה אחת מימין. לפי סעיף א) היא צריכה להתלכד עם כל היחידות משמאל, אך זה לא יתכן, כי יש 7 יחידות <u>שונות</u> משמאל.