

מבוא לטופולוגיה - תרגיל 12

שאלה 1

יהי (M_1, d_1) , (M_2, d_2) מרחבים מטריים.
ראינו בכיתה שהפונקציה $d: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$
המוגדרת על ידי נוסחה:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

מקיימת אקסיומות מטריקה ולכן מאפשרת לראות
 $(M_1 \times M_2, d)$ כמרחב מטרי.

נסמן ב- τ את הטופולוגיה המושרתת בקבוצה
 $M_1 \times M_2$ על ידי המטרוקה d . הבסיס הטבעי \mathfrak{B} של
הטופולוגיה הזאת מורכב מכדורים:

$$\mathfrak{B} = \{B((a_1, a_2), r) \mid a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r > 0\}$$

נסמן ב- τ_\times טופולוגית המכפלה במרחב
 $(M_1, d_1) \times (M_2, d_2)$. אחד מהבסיסים הקיימים
לטופולוגיה הזאת מורכב ממכפלות:

$$\mathfrak{B}_\times = \{B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2) \mid a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r_1, r_2 > 0\}$$

כאן $B_1(a_1, r_1), B_2(a_2, r_2)$ כדורים במטריקות
 d_1, d_2 בהתאם.

בהשתמש את שני הבסיסים. הוכיחו ש- $\tau = \tau_\times$.

שאלה 2

יהיו X, Y מ"ט ותהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. הגרף של f הוא תת-מרחב של $X \times Y$ המוגדר באופן הבא: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$.
הכיחו ש- X הומאומורפי ל- Γ_f .

שאלה 3

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- Y - מרחב קומפקטי.

(א) הוכיחו שההטעלה $p_X: X \times Y \rightarrow X$ היא פונקציה סגורה.

(ב) תהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה. הוכיחו שאם הגרף

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$$

ב- $X \times Y$, אזי f פונקציה רציפה.

שאלה 4

יהיו X_1, \dots, X_n מ"ט קומפקטיים.

הוכיחו שהמרחב $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ קומפקטי.

שאלה 5

יהיו X, Y, Z מרחבים טופולוגיים. נגדיר יחס \sim על מרחב המכפלה $X \times Y \times Z$ כך ש- $(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow x = x' \wedge z = z'$.

הוכיחו:

- (א) \sim יחס שקילות;
- (ב) $(X \times Y \times Z)/\sim$ הומאומורפי ל- $X \times Z$.