תרגיל 9 – חדוו"א 1 לביולוגיה חישובית

שאלה 1
נניח f ו g מונוטוניות עולות. הוכח או הפרך את הסעיפים הבאים:

א. $-f$ מונוטונית יורדת.

ב. $f+g$ מונוטונית עולה.

ג. $f-g$ מונוטונית (עולה או יורדת).

ד. $f\cdot g$ מונוטונית.

הוכח את הסעיף הבא:

הראה שאם f,g מונוטונית אז גם $f\circ g$ מונוטונית אם ההרכבה $f\circ g$ מוגדרת.

פתרון שאלה 1
סעיף א
נכון,

נתון ש f פונקציה מונוטונית עולה ולכן אם $x_1<x_2$ אז $f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$ ולכן $-f\left(x_1\right)\ge -f\left(x_2\right)$ ז"א $-f$ מונוטונית יורדת.

סעיף ב
נכון,

נתון ש f ו g מונוטוניות עולות ולכן אם $x_1<x_2$ אז

$f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right),g\left(x_1\right)\le g\left(x_2\right)\Rightarrow f\left(x_1\right)+g\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)+g\left(x_2\right)$ ז"א $f+g$ מונוטונית עולה.

סעיף ג
לא נכון,

הפונקציות $f\left(x\right)=x+\sin x, g\left(x\right)=x$ מונוטוניות עולות בתחום $\left[1,\infty\right)$ אבל הפונקציה $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\sin x$ לא מונוטונית.

סעיף ד
לא נכון,

הפונקציות $f\left(x\right)=x-1, g\left(x\right)=x$ מונוטוניות עולות אבל הפונקציה $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=x^2-x$ לא מונוטונית.

סעיף ה
נתון ש f ו g מונוטוניות עולות ולכן אם $x_1<x_2$ אז $g\left(x_1\right)\le g\left(x_2\right)$ ואז $f\left(g\left(x_1\right)\right)\le f\left(g\left(x_2\right)\right)$.

שאלה 2
א. תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=\begin{cases}1+\ln x & x\le 1\\ 2x^2-ax+b & x>1\end{cases}$.

מצא a,b כך ש $f\left(x\right)$ תהייה גזירה ורציפה עבור כל $x>0$.

ב. מצא משיק לפונקציה $f\left(x\right)=x^3-x^2-2$ בנקודה בה $x=-1$. מצא משיק נוסף המקביל לו.

ג. תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3+2 & 1\le x\\ ax+b & 0<x<1\\ x^2+x+1 & x\le 0\end{cases}$.

i. חשב את $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right),\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)$.

ii. מצא את a,b כך ש $f\left(x\right)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

תחילה נרצה שהפונקציה $f\left(x\right)$ תהייה רציפה. $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=1, \lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=2-a+b$.

כדי שהפונקציה תהייה גזירה נבדוק שהנגזרות החד צדדיות בנקודה $x=1$ תהיינה שוות.

עבור $x>1$ נקבל ש $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ ולכן $f_+'(1)=1$.

עבור $x<1$ נקבל ש $f'\left(x\right)=4x-a$ ולכן $f_-'(1)=4-a$.

נקבל ש $\begin{cases}4-a=1\\2-a+b=1\end{cases}$ מפתרון מערכת המשוואות נקבל $a=3,b=2$.

סעיף ב

נקודת ההשקה היא $\left(-1,-4\right)$.

נמצא את שיפוע המשיר בנקודה $\left(-1,-4\right)$.

$f'\left(x\right)=3x^2-2x \Rightarrow f'\left(-1\right)=5$ ומשוואת המשיק היא $y=5x+1$.

השיפוע של ישר המקביל למשיק הנ"ל הוא 5 ולכן יש למצוא ערך של x שעבורו $f'\left(x\right)=5$.

$f'\left(x\right)=3x^2-2x$ נפתור את המשוואה $3x^2-2x=5 \Leftarrow 3x^2-2x-5=0 \Leftarrow \left(3x-5\right)\left(x+1\right)=0$.

עבור $x=-1$ מצאנו את משוואת המשיק. נמצא את משוואת המשיק עבור $x=\dfrac{5}{3}$.

$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\left(\dfrac{5}{3}\right)^3-\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-2=-\dfrac{4}{27}$ ולכן נקודת ההשקה $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{4}{27}\right)$.

משוואת המשיק $y+\dfrac{4}{27}=5\left(x-\dfrac{5}{3}\right) \Rightarrow y=5x-\dfrac{229}{27}$.

סעיף ג

$$\lim_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^+}\left(x^3+2\right)=3$$

$$\lim_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-}\left(ax+b\right)=a+b$$

כדי שהפונקציה תהייה רציפה צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(ax+b\right)=b$$

$$\lim_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^-}\left(x^2+x+1\right)=1$$

סה"כ נקבל ש $b=1,a+b=3$ כלומר $a=2,b=1$.

שאלה 3

מיין את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

א. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left(1+x\right)^4}$. ב. $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x^3+8}$ ג. $f\left(x\right)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ד. $f\left(x\right)=\dfrac{4}{3^{\frac{1}{x-5}}+2}+8$.

פתרון שאלה 3

סעיף א

נקודת אי הרציפות היא $x=-1$. מכיוון ש $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2}{(1+x)^4}=+\infty$ נקודת האי רציפות היא מסוג שני.

<u>סעיף ב</u>

נקודת אי הרציפות היא $x=-2$.

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} \Rightarrow f(x)=\frac{x+2}{x^3+8}$$ ואז

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-2x+4}=\frac{1}{12}.$$

נקודת האי רציפות היא סליקה.

<u>סעיף ג</u>

נקודת אי הרציפות היא $x=0$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+cosx}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}.$$

נשתמש בגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

נקודת האי רציפות היא סליקה.

<u>סעיף ד</u>

נקודת אי הרציפות היא $x=5$.

$\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{1}{x-5}=+\infty$ ולכן $\lim\limits_{x\to 5^+}3^{\frac{1}{x-5}}=+\infty$ ואז $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{4}{3^{\frac{1}{x-5}}+2}=0$.

סה"כ נקבל ש $\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\frac{4}{3^{\frac{1}{x-5}}+2}+8\right)=8$.

$\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{1}{x-5}=-\infty$ ולכן $\lim\limits_{x\to 5^+}3^{\frac{1}{x-5}}=0$ ואז $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{4}{3^{\frac{1}{x-5}}+2}=2$.

סה"כ נקבל ש $\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\frac{4}{3^{\frac{1}{x-5}}+2}+8\right)=10$.

הגבולות החד צדדים קיימים אבל שונים ולכן נקודת אי הרציפות היא מסוג ראשון.

<u>שאלה 4</u>

א. הראה ש $\sin\frac{1}{x}$ לא רציפה במידה שווה ב $(0,1)$.

ב. הראה ש $x\sin\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב $(0,1)$.

ג. הראה ש $\sin x^2$ לא רציפה במידה שווה ב $[0,\infty)$.

ד. הראה שאם f,g רציפות במידה שווה בקטע כלשהו אז גם $f+g$ רציפה במידה שווה.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

<u>הגדרה על פי היינה (טובה בד"כ לשלילה)</u>

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר כי f רציפה במידה שווה ב I אם:

לכל $x_n, y_n \in I$ מתקיים $|x_n - y_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

נסמן $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}, y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$.

נשים לב ש $|x_n - y_n| = \left|\dfrac{1}{2\pi n} - \dfrac{1}{(2n+0.5)\pi}\right| = \dfrac{0.5}{2n(2n+0.5)\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ אבל

$$\left|f(x_n) - f(y_n)\right| = \left|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{y_n}\right| = \left|\sin(2\pi n) - \sin(\pi(2n+0.5))\right| = |0-1| = 1 \neq 0$$

<u>סעיף ב</u>

נשתמש במשפט קנטור - פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ רציפה בו במידה שווה.

מכיוון ש $\sin\dfrac{1}{x}$ חסומה נקבל ש $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ ואז

הפונקציה $g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן רציפה בו במידה שווה.

אם פונקציה רציפה במידה שווה בקטע אז היא רציפה במידה שווה בכל קטע המוכל הוא ולכן $g(x)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$. נשים לב שבקטע $(0,1)$ נקבל ש $g(x) = f(x)$ ולכן f רציפה המידה שווה בקטע $(0,1)$.

<u>סעיף ג</u>

נשתמש בזהות $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

נסמן $x_n = n, y_n = n + \dfrac{1}{n}$. $|x_n - y_n| = \left|n - \left(n + \dfrac{1}{n}\right)\right| = \dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\left|f(x_n) - f(y_n)\right| = \left|\sin x_n^2 - \sin y_n^2\right| =$$

$$\left|\sin n^2 - \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = \left|2\sin\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)\cos\left(2n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right)\right|$$

ואין גבול לסדרה $2\sin\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right)\cos\left(2n^2 + 2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

<u>סעיף ד</u>

נתון ש f, g רציפות במידה שווה ב (a,b).

יהי $0 < \varepsilon_0$ כלשהו

f רציפה במידה שווה ב (a,b) ולכן

לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in I$ מתקיים

$|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

g רציפה במידה שווה ב (a,b) ולכן

לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in I$ מתקיים

$|x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ואז

$$\left|\left(f(x_1) + g(x_1)\right) - \left(f(x_2) + g(x_2)\right)\right| = \left|\left(f(x_1) - f(x_2)\right) + \left(g(x_1) - g(x_2)\right)\right| \le$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$