פתרון מועד א' תשעד

(פתרון תמציתי)

1. בהרצאה
2. בהרצאה
3. $(-1)^{n-1}(2n-1)$
4. אין מספיק נתונים כדי לדעת (תלוי למשל אם A ריבועית או לא)
5. C בסיס.
לפי השלישי חינם - מספיק לבדוק ש־3 וקטורים אלו בת"ל.
נניח $\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_1-v_2)+\alpha_3(v_3-v_2)=0$ אזי $(\alpha_1+\alpha_2)v_1+(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)v_2+\alpha_3v_3=0$ כיוון ש $\{v_1,v_2,v_3\}$ בת"ל נסיק $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=\alpha_3=0$ ואם עוד פישוטים נקבל לכל i $\alpha_i=0$ כנדרש
6. n^2-1 (נסמן $e_{i,j}$ את המטריצה שכולה אפסים חוץ מהמקום (i,j) ששמה יש 1)בסיס לדוגמא:
$$\{e_{i,j}\}_{i\neq j}\cup\{e_{i,i}-e_{n,n}\}_{i=1,2,\dots n-1}$$
7. אף אחד מהאפשרויות לא תתכן. לפי כלל קרמר $x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{|A_1|}{7}$ כיוון ש־7 ראשוני ו$|A_1|$ שלם (כדטרמ' של מטריצה עם מקדמים שלמים) ניתן להסיק את המבוקש.
8. $$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(א)

$$\begin{aligned}
f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -2 & 4 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -2 & 4 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right| \\
&= (\lambda-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -2 & 4 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right| \\
&= (\lambda-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ -2 & 6 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda-1)[(\lambda-4)(\lambda-3)-6] \\
&= (\lambda-1)[\lambda^2-7\lambda+6] = (\lambda-1)^2(\lambda-6)
\end{aligned}
$$

ע"ע הם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$

(ב)

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda_1=1} &= N(A-I) = N(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}) \\
&= N(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} -s+2t \\ t \\ s \end{pmatrix} |s,t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

ולכן בסיס ל $V_{\lambda_1=1}$ הוא $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda_2=6} &= N(A-6I) = N(\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}) \\
&= N(\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}) \\
&= N(\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -10 & -5 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}) \\
&= N(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\
& \quad \{\begin{pmatrix} -s+1.5s=0.5s \\ -0.5s \\ s \end{pmatrix} |s \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

ולכן בסיס ל $V_{\lambda_1=6}$ הוא $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

(ג) Aלכסינה כי לכל ע"ע מתקיים ריבוי אלגברי=ריבוי גאומטרי .

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

(ד) יהא λ ע"ע של B^tB כלומר קיים $v \neq 0$ כך ש $B^tBv = \lambda v$

ומכאן ש $||Bv||^2 = (Bv)^tBv = v^tB^tBv = v^t\lambda v = \lambda v^tv = \lambda||v||^2$ (כאשר

$||\cdot||$ היא המכפלה הסקלארית)

כיוון ש $||v|| \neq 0$ נקבל $\lambda = \frac{||Bv||^2}{||v||^2} \geq 0$

9. נסמן את $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

(א) $T(e_1) = 1, T(e_2) = 0, T(e_3) = 1$ ולכן $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ב)

$$\begin{aligned} Img(T) &= \{T(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + c \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a + c | a, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = span\{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ker(T) &= \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + c = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

(ג) Tאינה איזומורפיזם כי היא לא חח"ע כי $kerT \neq \{0\}$

10. $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

(א)

$$|Q| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} | \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} | = \frac{1}{6} | \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} | = 1$$

(ב) נשים לב כי Q א"ג כלומר $Q^tQ = I$ ולכן לכל מטריצה A מתקיים:

$$\begin{aligned} ||AQ|| &= \sqrt{\langle AQ, AQ \rangle} = \sqrt{tr(AQ(AQ)^t)} = \sqrt{tr(AQQ^tA^T)} \\ &= \sqrt{tr(AIA^T)} = \sqrt{tr(AA^T)} \\ &= \sqrt{\langle A, A \rangle} = ||A|| \end{aligned}$$