ב"ש אנליזה 2 תשעז מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}
\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{cc} f=\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & f'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+1} \\ g'=1 & g=x \end{array} \right\} \\
&= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x^2+1}\cdot x\mathrm{d}x \\
&= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1+C\right|
\end{aligned}$$

(ב) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\left[1-\sin^2(x)\right]}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t=\sin(x) \\ \mathrm{d}t=\cos\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{1}{-t^2+t+2}\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{(t-2)(t+1)}\mathrm{d}t$$

נמשיך עם חישוב $\int \frac{1}{(t-2)(t+1)}\mathrm{d}x$. בעזרת שברים חלקיים, קיימים A,B קבועים כך ש

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+1}$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל $1=A(t+1)+B(t-2)$. הצבה $t=-1$ תתן $1=-3B$ ולכן $B=-\frac{1}{3}$. הצבה $t=2$ תתן $1=3A$ ולכן $A=\frac{1}{3}$. ולכן

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{(t-2)(t+1)}\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-2}\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{3}\left[-\ln|t-2|+\ln|t+1|\right]+C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית, לפי מונחי x המקוריים היא:

$$\frac{1}{3}\left[-\ln|\sin(x)-2|+\ln|\sin(x)+1|\right]+C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבול מימין

$$\lim_{x\to0^+} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0^+} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{e^{\infty}\} = \infty$$

ונחשב את הגבול משמאל

$$\lim_{x\to0^-} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{0\cdot e^{-\infty}\} = 0$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית $x=0$ (מצד ימין).

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

ו

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x = \lim_{x\to\infty} x\left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = e^0 = 1$$

ולכן $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

ו

$$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} xe^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x = \lim_{x\to-\infty} x\left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = e^0 = 1$$

ולכן $y=x+1$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ שהרי המונה x^2-x+1 לא מתאפס ($(-1)^2-4\cdot1\cdot1<0$).
נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם מתכנס. לכל $1\le x$ מתקיים כי $0<x^2-x+1$ שהרי x^2-x+1 אינו מתאפס והצבה שרירותית של 2 תראה ש $2^2-2+1>0$. בנוסף $\arctan(x)>0$ בתחום לכל x חיובי ובפרט לכל $1\le x$. ולכן $\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}>0$ בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\arctan(x)}{x^2-x+1} \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi/2}{1-0+-} = \frac{\pi}{2}$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש e^{-t^2} רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{e^x-1}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-(-x)^2}}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}}{e^x}=2\cdot\frac{1}{1}=2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}$

פתרון: מתקיים

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}\geq n\cdot\frac{n}{n+n}=n\cdot\frac{1}{2}\to\infty$$

ולפי חצי סנוויץ, נקבל ש $a_n\to\infty$.

.4

(א) קרבו את $\int_0^1\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב x^2 במקום x, נקבל

$$\sin\left(x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

ולכן

$$\int_0^1\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1\left(x^{4n+2}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{4n+3}$$

וכעת: כיוון שזהו טור לייבניץ מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{4n+3}\right|\leq\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{4k+3}\right|=\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{4k+3}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\int_0^1\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{4n+3}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{4k+3}\leq\frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{100}<\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{120}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{4n+3}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{42}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש.

(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n n!}$.

פתרון: נסדר קצת

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!-1}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$$

כאשר המעבר מוצדק ע"י שנראה ששני הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n n!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$ מתכנסים ובעזרתם נחשב את התשובה הסופית. הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=1\cdot(2)=2$$

פשוט לחישוב כי זהו טור הנדסי. כעת, לטור השני:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n=e^{\frac{1}{2}}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהשיוויון הידוע ש $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (לכל x). לכן התשובה הסופית היא

$$2-e^{\frac{1}{2}}$$

5. תהיינה פונקציות f,g פונקציות חיוביות כך ש $0\le\frac{f'g-g'f}{g^2}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^{\infty}f$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty}g$ מתכנס.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^{\infty}g$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty}f$ מתכנס.

פתרון: נשים לב שכיוון ש g חיובית נוכל להסתכל על הפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ואז $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$. לפי הנתון $h'(x)\le 0$ לכל x ולכן נסיק ש h פונקציה יורדת. מכאן ש $h(x)\le h(0)$ לכל $0\le x$. מכאן שלכל $0\le x$ מתקיים

$$\frac{f(x)}{g(x)}\le\frac{f(0)}{g(0)}$$

ולכן

$$f(x)\le\frac{f(0)}{g(0)}g(x)$$

ולכן $\int_0^{\infty}g$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty}\frac{f(0)}{g(0)}g=\frac{f(0)}{g(0)}\int_0^{\infty}g$ כי זה כפל בקבוע. ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון (כיוון ש f,g חיוביות וגם $\frac{f(0)}{g(0)}$ חיובי) נקבל ש $\int_0^{\infty}f$ מתכנס. וזה עונה על הסעיף השני. לגבי הסעיף הראשון, נוכל לתת כדוגמה נגדית את הפונקציות

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\ge 1\\ -2x+3 & x<1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\ge 1\\ -x+2 & x<1\end{cases}$$

מתקיים ש

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2(1+h)+3-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h}=-2$$

וגם

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-2\frac{1}{1^3}=-2$$

ולכן $f'(1)=-2$. באופן דומה $g'(1)=$ ולכן

$$f'(x)=\begin{cases}-2\frac{1}{x^3} & x\geq 1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2} & x\geq 1\\ -1 & x<1\end{cases}$$

ובנוסף, f,g חיוביות ומתקיים

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=\begin{cases}-2\frac{1}{x^4}-\left(-\frac{1}{x^4}\right) & x\geq 1\\ -2\left(-x+2\right)-\left(-1\right)\left(-2x+3\right) & x<1\end{cases}$$

ומכיוון ש $-2\frac{1}{x^4}-\left(-\frac{1}{x^4}\right)=-\frac{1}{x^4}<0$ וגם

$$-2\left(-x+2\right)-\left(-1\right)\left(-2x+3\right)=2x-4+\left(-2x+3\right)=-1<0$$

נקבל שאכן $\frac{f'g-g'f}{g^2}\leq 0$ לכל x (החילוק במשהו חיובי, לא משנה את הסימן). ומצאנו הפרכה לסעיף א.