הרצאה 8

קואורדינאטות של וקטור לפי בסיס   משפט (יחידות ההצגה לפי בסיס)

יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהא $B=\{v_1,...,v_n\}\subseteq V$ בסיס.

לכל $v\in V$ יש דרך אחת ויחידה לבחור $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}$ עבורם $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$.

הוכחה

יהי $v\in V$, מכיוון ש $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס אז $\{v_1,...,v_n\}$ פורש את V, ולכן קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}$ עבורם $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$. נניח שקיימים $\beta_1,...,\beta_n\in\mathbb{F}$ שעבורם קיים $1\le i\le n$ כך ש $\alpha_i\ne\beta_i \Rightarrow \alpha_i-\beta_i\ne 0$ ומתקיים $v=\beta_1v_1+\beta_2v_2+...+\beta_nv_n$.

סה"כ קיבלנו ש

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n=\beta_1v_1+\beta_2v_2+...+\beta_nv_n \Rightarrow (\alpha_1-\beta_1)v_1+(\alpha_2-\beta_2)v_2+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n=0$$

מכיוון שקיים $1\le i\le n$ כך ש $\alpha_i-\beta_i\ne 0$ קיבלנו צירוף לא טרויאלי של $\{v_1,...,v_n\}$ שנותן אפס ז"א הקבוצה $\{v_1,...,v_n\}$ תלויה ליניארית בסתירה לכך ש $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס.

הצגה של וקטור לפי בסיס

לאור המשפט הקודם ניתן להגדיר את ההצגה של וקטור v לפי הבסיס B להיות וקטור המקדמים שעבורם $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$, וכותבים $[v]_B:=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

הסקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ נקראים הקואורדינאטות של v ביחס לבסיס B.

ה n-יה הסדורה $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ נקראת וקטור הקואורדינאטות.

דוגמא

נתבונן במרחב הוקטורי $P_2(x)$ של פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל 2.

הפולינומים $p_1(x)=1, p_2(x)=x-1, p_3(x)=x^2-2x+1$ יוצרים בסיס B של $P_2(x)$.

יהי $v=2x^2-5x+6$ נשים לב ש $v=3p_1(x)-p_2(x)+2p_3(x)$ ולכן $[v]_B=(3,-1,2)$.

תרגיל

יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$. הוכח את הטענות הבאות:

א. $[v]_B=(0,0,...,0)\Leftrightarrow v=0_v$ $(v\in V)$.

ב. $v=w\Leftrightarrow [v]_B=[w]_B$ $(v,w\in V)$.

ג. לכל $\vec{\alpha}\in\mathbb{F}^n$ יש $v\in V$ כך ש $[v]_B=\vec{\alpha}$.

ד. $[\alpha v+\beta w]_B=\alpha[v]_B+\beta[w]_B$ ($v,w\in V$ ו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$).

פתרון

V מרחב וקטורי ממימד n. $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס של V.

א. אם $v=0$ אז $v=0\cdot v_1+0\cdot v_2+...+0\cdot v_n$ ז"א $[v]_B=(0,0,...,0)$.

אם $[v]_B=(0,0,...,0)$ אז $v=0\cdot v_1+0\cdot v_2+...+0\cdot v_n$ ולכן $v=0$.

ב. נניח ש $[v]_B=[w]_B=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ז"א $\begin{matrix} v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2...+\alpha_nv_n \\ w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2...+\alpha_nv_n\end{matrix} \Rightarrow v=w$.

נניח ש $v=w$ מהמשפט הקודם יש הצגה יחידה שעבורה $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$ מיחידות ההצגה ומכיוון ש $v=w$ נקבל ש $w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$ ואז $[v]_B=[w]_B$.

ג. יהי $\vec{\alpha}\in\mathbb{F}^n$ ז"א $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ עבור $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$ נקבל ש $[v]_B=\vec{\alpha}$.

ד. יהי $v,w \in V$ מכיוון ש $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס של V ניתן לרשום את v,w כצירוף ליניארי של איברים מ $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$.

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n$$
$$w=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+...+\beta_n v_n$$

$$\alpha v+\beta w=\alpha\left(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n\right)+\beta\left(\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+...+\beta_n v_n\right)$$
$$\alpha v+\beta w=\left(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1\right)v_1+\left(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2\right)v_2+...+\left(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n\right)v_n$$

ולכן $\left[\alpha v+\beta w\right]_B=\left(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1,\alpha\alpha_2+\beta\beta_2,...,\alpha\alpha_n+\beta\beta_n\right)$.

$$\begin{matrix} v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n \\ w=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+...+\beta_n v_n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} [v]_B=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right) \\ [w]_B=\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right) \end{matrix}$$

סה"כ נקבל ש

$$\alpha[v]_B+\beta[w]_B=\alpha\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)+\beta\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)=\left(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1,\alpha\alpha_2+\beta\beta_2,...,\alpha\alpha_n+\beta\beta_n\right)$$

<u>**משפט**</u>

יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1,...,v_n,b \in V$ כלשהם.

אז התכונות הבאות שקולות:

א. $b=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$.

ב. לכל בסיס B של V, הוקטור $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ הוא פתרון של המערכת $Ax=[b]_B$ כאשר $A=\left([v_1]_B,...,[v_n]_B\right)$.

<u>**הוכחה**</u>

יהי $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ בסיס של V ולכן ניתן לרשום את הוקטורים $v_1,...,v_n$ כצירוף ליניארי של איברים מ B. נניח ש

$$v_1=a_{11}u_1+a_{12}u_2+...+a_{1n}u_n$$
$$\vdots$$
$$v_n=a_{n1}u_1+a_{n2}u_2+...+a_{nn}u_n$$

אם $b=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$ אז

$$[b]_B=\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{21}+...+\alpha_n a_{n1} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_1 a_{1n}+\alpha_2 a_{2n}+...+\alpha_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & a_{n1} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & a_{n1} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{21}+...+\alpha_n a_{n1} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_1 a_{1n}+\alpha_2 a_{2n}+...+\alpha_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

ואז $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ הוא פתרון של המערכת $Ax=[b]_B$.

אם $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ הוא פתרון של המערכת $Ax=[b]_B$ נקבל ש

$$[b]_B=\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{21}+...+\alpha_n a_{n1} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_1 a_{1n}+\alpha_2 a_{2n}+...+\alpha_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

ואז $b=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$.

מהתרגיל האחרון נובע, שכדי להציג וקטור מסוים b כצירוף ליניארי של וקטורים אחרים, כל שיש לעשות הוא לפתור את המערכת $\left([v_1]_B,\ldots,[v_n]_B\right)x=[b]_B$.

<u>תרגיל</u>

הצג את המטריצה $\begin{pmatrix}30&24\\22&24\end{pmatrix}$ כצירוף ליניארי של המטריצות: $\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

ניקח את הבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

$$v_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow[v_1]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow[v_2]_B=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$v_3=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow[v_3]_B=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$v_4=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow[v_4]_B=\begin{pmatrix}4\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}30&24\\22&24\end{pmatrix}=30\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+24\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+22\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+24\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow[v_1]_B=\begin{pmatrix}30\\24\\22\\24\end{pmatrix}$$

יש לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&30\\2&3&4&1&24\\3&4&1&2&22\\4&1&2&3&24\end{array}\right)\overset{\substack{2R_1-R_2\to R_2\\3R_1-R_3\to R_3\\4R_1-R_4\to R_4}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&30\\0&1&2&7&36\\0&2&8&10&68\\0&7&10&13&96\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2R_2-R_3\to R_3\\7R_2-R_4\to R_4}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&30\\0&1&2&7&36\\0&0&-4&4&4\\0&0&4&36&156\end{array}\right)\overset{R_3+R_4\to R_4}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&30\\0&1&2&7&36\\0&0&-4&4&4\\0&0&0&40&160\end{array}\right)$$

הפתרון של המערכת הוא $\alpha_4=4,\alpha_3=3,\alpha_2=2,\alpha_1=1$ ואכן מתקיים

$$\begin{pmatrix}30&24\\22&24\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}.$$

<u>מטריצות מעבר בין בסיסים</u>

נניח ש $C=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ הוא בסיס של מרחב וקטורי V ונניח ש $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ הוא בסיס אחר.

מכיוון ש C בסיס, כל וקטור ב B ניתן לכתיבה באופן יחיד כצירוף ליניארי של איברי C. ז"א:

$$u_1=a_{11}v_1+a_{12}v_2+...+a_{1n}v_n$$
$$u_2=a_{21}v_1+a_{22}v_2+...+a_{2n}v_n$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$u_n=a_{n1}v_1+a_{n2}v_2+...+a_{nn}v_n$$

תהי P המטריצה המשוחלפת של מטריצת המקדמים ז"א

$$P=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&.&.&.&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&.&.&.&a_{n2}\\.&.&&&&.\\.&.&&&&.\\.&.&&&&.\\a_{1n}&a_{2n}&&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

אזי P נקרת מטריצת מעבר בין בסיסים. (מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C)

נוכיח בהמשך ש $P[v]_B=[v]_C$.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בשני הבסיסים הבאים של $\mathbb{R}^2$:

$$C=\{(1,0),(0,1)\}\qquad\qquad B=\{(1,2),(3,5)\}$$

נמצא את מטריצת המעבר המקיימת $P[v]_B=[v]_C$.

$(1,2)=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)$

$(3,5)=3\cdot(1,0)+5\cdot(0,1)$

מטריצת המעבר היא $\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$.

נראה בדוגמא שאכן מתקיים $P[v]_B=[v]_C$.

נניח ש $v=(7,12)$. $[v]_B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},[v]_c=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$.

נמצא את מטריצת המעבר המקיימת $Q[v]_C=[v]_B$.

$(1,0)=-5\cdot(1,2)+2\cdot(3,5)$

$(0,1)=3\cdot(1,2)-1\cdot(3,5)$

מטריצת המעבר היא $\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$.

נשים לב ש $\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, בנוסף $\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ז"א $Q=P^{-1}$.

נסמן את מטריצת המעבר P שמקיימת $P[v]_B=[v]_C$ ע"י $[I]_C^B$.

טענה 1

תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ $Ax=0$ אזי $A=0$.

הוכחה

נניח ש $A\neq 0$ ז"א קיימים $1\leq i,j\leq n$ כך ש $a_{ij}\neq 0$. נשים לב שבשורה ה i של המכפלה Ae_j נקבל a_{ij} בסתירה לכך שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ $Ax=0$.

טענה 2

תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ $Ax=x$ אזי $A=I$.

הוכחה

נתון שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ $Ax=x$ ז"א לכל $x\in\mathbb{F}^n$ $Ax-Ix=0 \Leftarrow (A-I)x=0$ ולפי הטענה הקודמת $A-I=0 \Leftarrow A=I$.

משפט

תהיי P מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C במרחב וקטורי V. אזי P מטריצה הפיכה ולכל וקטור $v\in V$ $P[v]_B=[v]_C$ וכן $[v]_B=P^{-1}[v]_C$.

הוכחה

נניח ש $C=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ו $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ אזי P היא המטריצה הריבועית $n\times n$

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{n2}\\ . & . & & & & .\\ . & . & & & & .\\ . & . & & & & .\\ a_{1n} & a_{2n} & & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

יהי $v\in V$ מכיוון ש $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ בסיס ניתן לכתוב את v באופן יחיד כצירוף ליניארי של איברי B ז"א $v=k_1u_1+k_2u_2+...+k_nu_n$ ולכן

$$[v]_B=\begin{pmatrix} k_1\\ k_2\\ .\\ .\\ .\\ k_n\end{pmatrix} \Rightarrow P[v]_B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{n2}\\ . & . & & & & .\\ . & . & & & & .\\ . & . & & & & .\\ a_{1n} & a_{2n} & & & & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k_1\\ k_2\\ .\\ .\\ .\\ k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}k_ia_{i1}\\ \sum_{i=1}^{n}k_ia_{i2}\\ .\\ .\\ .\\ \sum_{i=1}^{n}k_ia_{in}\end{pmatrix}$$

ראינו ש

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1+a_{12}v_2+...+a_{1n}v_n\\ u_2 &= a_{21}v_1+a_{22}v_2+...+a_{2n}v_n\\ &.\\ &.\\ &.\\ u_n &= a_{n1}v_1+a_{n2}v_2+...+a_{nn}v_n\end{aligned}$$

נציב את המשוואות הנ"ל בשוויון $v=k_1u_1+k_2u_2+...+k_nu_n$ ונקבל

$$v=k_1\sum_{i=1}^{n}a_{1i}v_i+k_2\sum_{i=1}^{n}a_{2i}v_i+...+k_n\sum_{i=1}^{n}a_{ni}v_i=\left(\sum_{i=1}^{n}k_ia_{i1}\right)v_1+\left(\sum_{i=1}^{n}k_ia_{i2}\right)v_2+...+\left(\sum_{i=1}^{n}k_ia_{in}\right)v_n$$

כדרוש.

באותו אופן ניתן לקבל מטריצה Q המקיימת $Q[v]_C=[v]_B$. נשאר להוכיח ש $Q=P^{-1}$.

נוכיח שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ נקבל $(QP)x=x$ ומטענה 2 נקבל ש $QP=I$ ואז $Q=P^{-1}$.

יהי $x\in\mathbb{F}^n$ ז"א $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$ עבור הווקטור $v=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n$ נקבל ש $[v]_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$.

$$(QP)x=Q(Px)=Q\left(P[v]_B\right)=Q[v]_C=[v]_B=x.$$

<u>תרגיל</u>

הוכח ש $[I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}=[I]_{B_3}^{B_1}$.

<u>פתרון</u>

נוכיח שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $\left([I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}\right)x=[I]_{B_3}^{B_1}x$ ואז נקבל שלכל $x\in\mathbb{F}^n$

$\left([I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}-[I]_{B_3}^{B_1}\right)x=0$ ומטענה 1 $[I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}-[I]_{B_3}^{B_1}=0 \Leftarrow [I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}=[I]_{B_3}^{B_1}$.

נניח ש $B_1=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ יהי $x\in\mathbb{F}^n$ ז"א $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$ עבור הווקטור $v=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n$

נקבל ש $[v]_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$ ואז מצד אחד $[I]_{B_3}^{B_1}x=[I]_{B_3}^{B_1}[v]_{B_1}=[v]_{B_3}$ ומצד שני

$$\left([I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}\right)x=[I]_{B_3}^{B_2}\cdot\left([I]_{B_2}^{B_1}x\right)=[I]_{B_3}^{B_2}\cdot\left([I]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}\right)=[I]_{B_3}^{B_2}[v]_{B_2}=[v]_{B_3}.$$

מכיוון ש B_3 בסיס ניתן לכתוב את v באופן יחיד כצירוף ליניארי של איברי B_3 סה"כ קיבלנו שלכל $x\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $\left([I]_{B_3}^{B_2}\cdot[I]_{B_2}^{B_1}\right)x=[I]_{B_3}^{B_1}x$.

<u>תרגיל</u>

יהיו $V=\mathbb{R}_2[x]$, $S=\{1,x,x^2\}$, $B=\{1,2-x,3x^2\}$.

א. מצא את המטריצה P המקיימת $P[v]_B=[v]_S$.

ב. מצא את המטריצה Q המקיימת $Q[v]_S=[v]_B$.

ג. יהא $C=\{1+x^2,x+x^2,x^2\}$. מצא את המטריצה A המקיימת $A[v]_C=[v]_S$.

ד. מצא את המטריצה D המקיימת $D[v]_C=[v]_B$.

<u>פתרון</u>

א.

נרשום כל וקטור ב B כצירוף ליניארי של איברי S.

$$B=\{1,2-x,3x^2\}$$

$$1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2$$
$$2-x=2\cdot 1+(-1)\cdot x+0\cdot x^2$$
$$3x^2=0\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2$$

ואז $P=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

ב.

לפי המשפט הקודם נקבל ש $Q=P^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&3&0&0&1\end{array}\right)\underset{\frac{1}{3}R_3\to R_3}{\overset{\substack{R_1+2R_2\to R_1\\ -R_2\to R_2}}{\approx}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

ואז $Q=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

ג.

נרשום כל וקטור ב B כצירוף ליניארי של איברי S.

$$C=\{1+x^2,x+x^2,x^2\}$$

$$1+x^2=1\cdot 1+0\cdot x+1\cdot x^2$$
$$x+x^2=0\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2$$
$$x^2=0\cdot 1+0\cdot x+1\cdot x^2$$

ואז $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

ד.

נשים לב ש $Q=[I]_B^S$, $A=[I]_S^C$, $D=[I]_B^C$. ראינו בתרגיל הקודם ש $[I]_B^C=[I]_B^S[I]_S^C$ ז"א

$$D=QA$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$