הרצאה 12

תזכורת R חוג. R-מודול (שמאלי) הינו חבורה אבלית M עם כפל סקלרי

$$R\times M \longrightarrow M$$
$$(r,m)\longmapsto rm$$

כך ש:

1) $(r+s)m = rm+sm$ לכל $r,s\in R$, $m,n\in M$

2) $r(m+n) = rm+rn$

3) $r(sm) = (rs)m$

4) $1\cdot m = m$

הגדרה יהי M R-מודול. תת-מודול הינו תת-חבורה $N\leq M$ שהינה סגורה לכפל סקלרי: $rn\in N$ לכל $r\in R$, $n\in N$.

טענה יהי M R-מודול. אזי:

1) $0_R m = 0_M$ לכל $m\in M$.

איבר היחידה של M

הוכחה

$0_R m = (0_R+0_R)m =$

$0_R\cdot m + 0_R\cdot m$

$\Longleftarrow$

$0_M = 0_R\cdot m$

2) לכל $m\in M$, $(-1_R)m = -m$

שים לב כי $1_R\cdot m \overset{(4)}{=} m$.

$$0_M = 0_R\cdot m = (1_R + (-1_R))m = 1_R m + (-1_R)m$$
$$= m + (-1_R)\cdot m$$

$$\Longleftarrow \quad -m = (-1_R)\cdot m$$

<u>דוגמאות</u> 0) M R-מודול כלשהו. אזי M, (0_M) הם תת-מודולים.

<u>הוכחה</u> צריך להוכיח שלכל $r\in R$,

$$r\cdot 0_M = 0_M$$
$$r\cdot 0_M = r\cdot(0_M+0_M) = r\cdot 0_M + r\cdot 0_M$$
$$0_M = r\cdot 0_M$$

1) R חוג, $R=M$ (עם חיבור)

הכפל הסקלרי הינו הכפל של R.

אז ניתן לראות את R כמודול מעל עצמו. תת-מודולים הם האידיאלים השמאליים.

2) ראינו בפעם שעברה שלכל חבורה אבלית M יש מבנה יחיד של $\mathbb{Z}$-מודול:

$$\underbrace{n}_{n\in\mathbb{Z}}\cdot m = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \text{ פעמים}}$$

אם $\mathbb{Z}$-מודול $\Longleftrightarrow$ גם - חבורה.

3) F שדה. מהו $F[x]$ - מודול?

אני טוען כי $F[x]$ - מודול $\Longleftrightarrow$

מרחב וקטורי V מעל F וגם

אנדומורפיזם $\varphi: V\to V$. בהינתן כזה,

$$(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\cdot v = a_n\cdot\varphi^n(v)+\cdots+a_1\cdot\varphi(v)+a_0\cdot v.$$

כן, אותו $F[x]$ - מודול. מאידך, בהינתן

$F[x]$ - מודול M, יהי $V=M$ עם כפל סקלרי ב-F.

$$\varphi: V\to V$$

$$\varphi(v)=x\cdot v$$

4) יהי R חוג, X קבוצה. מודול חפשי

$$M=R^X=\{f: X\to R \mid \text{יש רק מספר סופי של } x\in X \text{ כך ש- } f(x)\neq 0_R\}$$

$$=\{r_1x_1+\cdots+r_nx_n : x_1,\dots,x_n\in X\}$$

אם X סופית, $|X|=n$, אזי $R^X \simeq R^n$

$$x_1=(1_R, 0_R, \ldots, 0_R)$$
$$x_2=(0_R, 1_R, \ldots, 0_R)$$

$$(r_1,\ldots,r_n)=r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n$$

ג) יהיו $R\subset S$ חוגים. יש ל-S (עם החב

מבנה טבעי של R-מודול:

הכפל הסקלרי rs (כפל של S).

$r\in R,\ s\in S$

ד) בהינתן הומו' של חוגים $f:R\to S$,

עדיין יש ל-S מבנה טבעי של R-מודול

$$\underbrace{r\cdot s}_{\text{כפל סקלרי}} = \underbrace{f(r)\cdot s}_{\text{כפל ב-}S}$$

ה) יהי M R-מודול. המאפס של M הינו

$$Ann(M)=\{r\in R:\ rm=0_M\ \ \forall m\in M\}$$

annihilator

הוכיחו כי $Ann(M)\lhd R$.

ונאמר M נקרא נאמן אם $Ann(M)=(0)$.

M נאמן $\Leftarrow$ אם $r,s\in R$ כך ש- $rm=sm$ לכל $m\in M$ $\Leftarrow$ $r=s$.

8) יהי M R-מודול.

$$Tor(M)=\{m\in M : \text{קיים } 0\neq r\in R \text{ כך ש- } rm=0_M\}$$

אם R תחום שלמות, זה תת-מודול של M.

יהיו $m,n\in Tor(M)$. יהיו $0\neq r,s\in R$ כך ש- $rm=sn=0_M$. אזי

$$\underbrace{rs}_{\neq 0}(m+n) = (rs)m+(rs)n = (sr)m+(rsn) = s\underbrace{(rm)}_{0}+r\underbrace{(sn)}_{0}=0_M$$

כי R תחום שלמות

$\Leftarrow m+n\in Tor(M)$

אם $m\in Tor(M)$, $0\neq s\in R$ כך ש- $sm=0$.

לכל $r\in R$, $s(rm)\underset{\text{R חילופי}}{=}r(sm)=0_M$

$\Leftarrow rm\in Tor(M)$.

Tor(M) נקרא תת-מודול של פיתול (torsion).

הגדרה יהיו M,N מודולים מעל R.
הומ' של R-מודולים הינו
הומומורפיזם $f: M\to N$ של חבורות
אבליות שמתחלף עם הכפל הסקלרי,
כלומר

$$f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$$
$$f(rm_1) = r\cdot f(m_1)$$

לכל $r\in R$, $m_1,m_2\in M$

הומ' חח"ע ועל נקרא איזומורפיזם.

הגדרה יהי M R-מודול. יהי $N\leq M$
תת-מודול. המודול המנה M/N
הינו החבורה האבלית M/N (מוגדרת
כי M אבלית $\Leftarrow$ $N\trianglelefteq M$) עם כפל סקלרי

$$r\cdot(m+N) = rm+N.$$

צ"ל מוגדר היטב כי $m_1+N = m_2+N \Rightarrow$
קיים $n\in N$ כך ש- $m_2=m_1+n$

$$rm_2 = rm_1 + \underbrace{rn}_{\in N \text{ כי } N \text{ תת-מודול}}$$

לכן $rm_1+N = rm_2+N$.

תרגיל יהי $f: M \to N$ הומומורפיזם של R-מודולים. אזי:

א) $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$

הינו תת-מודול של M.

ב) מסקנה האיזו הראשון:

$$M/(\ker f) \simeq \underbrace{f(M)}_{\text{תת-מודול של } N}$$

ג) לכל תת-מודול $L \leq N$,

$f^{-1}(L) \leq M$ תת-מודול של M.

ד) לכל $K \leq M$ תת-מודול, $f(K) \leq N$ תת-מודול.

ה) מסקנה האיזו הרביעי: M R-מודול, $N \leq M$ תת-מודול. ויש הכלה בגעיי

$f: M \to M/N$

$f(m) = m + N$

$$\left\{ \text{תת-מודולים של } M/N \right\} \xleftrightarrow{\text{התאמה חח"ע ועל}} \left\{ \text{תת-מודולים של } M \text{ שמכילים } N \right\}$$

$f(K) \longleftarrow K$

$L \longmapsto f^{-1}(L)$

הגדרה יהי M R-מודול. תהי $B\subseteq M$ תת-קבוצה.

תת-המודול הנוצר על ידי M הוא

$$\{r_1b_1+\dots+r_nb_n \mid n\geq 0,\ r_i\in R,\ b_i\in B\}\leq M.$$

M נוצר על ידי B אם M הוא תת-המודול הנוצר על ידי B

(כלומר, אפשר לרשום כל איבר ב-M כצירוף לינארי של איברי M עם מקדמים מ-R).

M נוצר סופית אם אפשר לקחת B סופי.

M חופשי אם קיימת תת-קבוצה B כך שאת כל איבר של M אפשר לרשום באופן יחיד כצירוף לינארי $r_1b_1+\dots+r_nb_n$, $r_i\in R$, $b_i\in B$.

אם כן, B נקרא בסיס.

מסקנה מליניאריות: אם $R=F$ שדה,

אזי כל R-מודול הינו חפשי.

זה לא נכון באופן כללי:

לדוגמא, $M=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $R=\mathbb{Z}$.

(מה שבעצם הקבוצה קואני $\mathbb{Z}_6$)

לכל $m\in M$, $0_m = 6m$

אז אין סיכוי לרשום איבריה

באופן יחיד כצירוף ליניארי של משהו.

הגדרה יהיו $R\subset S$ חוגים חילופיים.

איבר $s\in S$ נקרא שלם מעל R אם s

הינו שורש של פולינום מתוקן ב- $R[x]$:

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_1 s + r_0 = 0_s$$

עבור $r_i\in R$ מתאימים.

לכל $s\in S$

הגדרה $R\subseteq R[s]\subseteq S$ תת-חוג הנוצר על ידי

s מעל R.

$$R[s] = \left\{ a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0 \;\middle|\; \begin{matrix} s \in S \\ a_i \in R \end{matrix} \right\}$$

<u>טענה</u> יהיו $R \subset S$ חוגים חילופיים. יהי $s \in S$. הטענות הבאות שקולות:

1) s שלם מעל R.

2) $R[s]$ הינו R-מודול נוצר סופית (עם מבנה המודול הבא מ- $R \subset R[s]$).

3) קיים תת-חוג $R[s] \subseteq T \subseteq S$ כך ש-T נוצר סופית כ-R-מודול.

4) קיים $R[s]$-מודול נאמן M כך ש-M נוצר סופית כ-R-מודול (מניחים רק לכפל בסקלרים מ-R).

<u>הוכחה</u> $2) \Rightarrow 3)$ ניקח $T = R[s]$.

$3) \Rightarrow 4)$ ניקח $M = T$. נאמן כי

$1 \in T \Leftarrow$ אם $r \in R[s]$, $r \in Ann(M)$

אזי $r \cdot 1 = 0 \Rightarrow r = 0$.

<u>(1 ⇐ (2</u> נראה כי $R[s]$ נוצר כ-R-מודול

על ידי $1, s, s^2, s^3, \dots$

אבל כיוון ש-s שלם מעל R, אזי

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_1 s + r_0 = 0$$

אזי

$$s^n = -r_{n-1}s^{n-1} - \dots - r_1 s - r_0$$

כמו כן:

$$s^{n+1} = ss^n = -r_{n-1}s^n - r_{n-2}s^{n-1} - \dots - r_1 s^2 - r_0 s$$

$$= \underbrace{(r_{n-1}^2 s^{n-1} + r_{n-1}r_{n-2}s^{n-2} \dots + r_{n-1}r_0)}_{-r_{n-1}s^n} - r_{n-2}s^{n-1} - \dots - r_1 s^2 - r_0 s$$

באינדוקציה: כל חזקה של s היא

צירוף לינארי של $1, s, \dots, s^{n-1}$.

לכן $R[s]$ נוצר כ-R-מודול על ידי

$1, s, \dots, s^{n-1}$, ולכן נוצר סופית.