אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 4

22 בנובמבר 2018

1. מצאו את הגבולות של הסדרות המרוכבות הבאות:

(א) $z_n = (0.5\text{cis}\frac{\pi}{6})^{2n}$

(ב) $z_n = (1 - \frac{1}{n})^n\text{cis}\frac{\pi}{4}$

(ג) $z_n = \frac{2n^2-3n+1}{8n^2+2} - 2 \cdot \sqrt[n]{n}i$

<u>פתרון:</u>

א. ראינו שכיון שהנורמה $|z| = 0.5 < 1$ אז מתקיים $z^n \to 0$. ולכן גם $z^{2n} = (z^n)^2 \to 0$.

ב. הגבול הוא: $\frac{1}{e}\text{cis}\frac{\pi}{4}$. הוכחה: נראה התכנסות רכיב רכיב: נתבונן בסדרה בהצגה הקרטזית: $z_n = (1 - \frac{1}{n})^n \cos\frac{\pi}{4} + (1 - \frac{1}{n})^n \sin\frac{\pi}{4}i = (1 - \frac{1}{n})^n \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i)$. כלומר, יש כאן קבוע, $\text{cis}\frac{\pi}{4}$ כפול הסדרה $(1 - \frac{1}{n})^n$, וראינו שזה הקבוע כפול גבול הסדרה. ניזכר בקורס הקודם שמתקיים: $(1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$, ולכן בסה"כ נקבל: ולכן נקבל כי זה קבוע כפול מתכנסת.

$$z_n \to \frac{1}{e}\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

ג. כאן נפתור לפי מה שראיתם בהרצאה שהסדרה $z_n = a_n + b_n i$ מתכנסת אם ורק אם הסדרות a_n, b_n מתכנסות. ואכן מתקיים: $a_n = \frac{2n^2-3n+1}{8n^2+2} \to \frac{2}{8} = 0.25$, וכן $b_n = -2 \cdot \sqrt[n]{n} \to -2$, ולכן בסה"כ:

$$z_n \to 0.25 - 2i$$

2. הראו שהפונקציות הבאות לא רציפות בנקודה $(0,0)$ (בנקודות מהצורה $(x,0), x \neq 0$ אין צורך לבדוק):

א.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

ב.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x} & x,y\neq 0\\ 0 & x=0\vee y=0\end{cases}$$

ג.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

.

<u>פתרון:</u>

רציפות של פונקציה בנקודה מסויימת (x_0,y_0) הכוונה שלכל סדרות $x_n\to x_0, y_n\to y_0$ מתקיים: $|f(x_n,y_n)-f(x_0,y_0)|\to 0$, כאשר השאיפה האחרונה היא שאיפה בממשיים. כאן הנקודה המבוקשת לבדיקה היא $(x_0,y_0)=(0,0)$. כיון שבשאלה הוגדר הערך של $f(0,0)$, על מנת להראות שהפונקציה לא רציפה מספיק למצוא זוג אחד של סדרות $x_n\to 0, y_n\to 0$ עבורן לא מתקיים: $|f(x_n,y_n)-f(0,0)|\to 0$. וזה מה שנעשה כאן:

א. אם נקבע את סדרת האיקסים להיות תמיד אפס, כלומר, $x_n=0$, וניקח למשל $y_n=\frac{1}{n}$, אז נקבל סדרת אפסים (כי המונה תמיד אפס), ולכן הגבול גם הוא אפס (הסדרה היא $f(x_n,y_n)=\frac{\sin 0}{\frac{1}{n}}=0$). כיון שהגבול שונה מערך הפונקציה ב$(0,0)$ נובע שהפונקציה לא רציפה. הערה חשובה: לא ניתן "לתקן" ע"י לקבוע $f(0,0)=0$ כי אם ניקח את הסדרות $x_n=y_n=\frac{1}{n}$ נקבל $f(x_n,y_n)=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1$ לפי הידוע משנה שעברה, וכיון שיש שני גבולות שונים נובע שאין דרך "לתקן".

ב. אם ניקח את הסדרות $x_n=\frac{1}{n}, y_n=\frac{2}{n}$ נקבל את הסדרה $f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}}-\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}-2=-1.5$ שהיא סדרה קבועה ולכן הגבול הוא -1.5 השונה מערך הפונקציה בנקודה. גם כאן לא יעזור תיקון אחר כי אם ניקח סדרות שוות $x_n=y_n$ (לא משנה מה הן בדיוק, למשל $\frac{1}{n}$) נקבל את הסדרה $f(x_n,y_n)=\frac{x_n}{x_n}-\frac{x_n}{x_n}=1-1=0$, שהיא סדרת אפסים ולכן הגבול הוא אפס, וכיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

ג. אם ניקח סדרות מהצורה $x_n=y_n^2$ נקבל את הסדרה $f(x_n,y_n)=\frac{y_n^2\cdot y_n^2}{y_n^4+y_n^4}=\frac{y_n^4}{2y_n^4}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ סדרה קבועה שהגבול הוא חצי. שוב, לא ניתן לקתן כי אם נקבע את $x_n=0$ וניקח סדרה למשל $y_n=\frac{1}{2}$ נקבל סדרת אפסים שהגבול הוא אפס. כיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

3. הראו שהפונקציות הבאות רציפות ב$\mathbb{R}^2$ (כלומר, רציפות בכל נקודה):

א.

$$f(x,y)=\begin{cases} y\cdot\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ y & x=0\end{cases}$$

פתרון:

א. כאן לא חייבים ללכת לפי הגדרה, אלא ניתן להשתמש בכך שמכפלת פונקציות רציפות היא רציפה. נתבונן בפונקציות: $h(x,y)=y$ שהיא רציפה כמובן בכל $\mathbb{R}^2$, ובפונקציה $g(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ שרציפה גם בכל $\mathbb{R}^2$ משנה שעברה. מה זו המכפלה שלהם? הפנקציה h תמיד מחזירה את y, ו־g היא פונקציה מפוצלת. לכן המכפלה גם תהיה מפוצלת, כמו g, רק שנכפיל בכל חלק ב־y, באופן הבא: $h\cdot g=\begin{cases} y\cdot\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ y\cdot 1 & x=0\end{cases}$. קיבלנו בדיוק את הפונקציה $f(x,y)$. יוצא שהפונקציה f היא מכפלה של הפונקציות h,g הרציפות, ולכן f רציפה.

למי שמעוניין, אפשר גם לפי הגדרה (בדיוק כמו שהוכחנו שמכפלת רציפות היא רציפה). הנקודות הבעייתיות הן הנקודות $(0,y)$ (לכל y, בין אם הוא אפס ובין אם לא). לכן צריך לראות אם לכל שתי סדרות $x_n\to 0, y_n\to y$ מתקיים: $|f(x_n,y_n)-f(0,y)|\to 0$. נציב בפונקציה נקבל:

$$|f(x_n,y_n)-f(0,y)|=|y_n\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}-y|=|y_n\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}-y_n+y_n-y|$$

כעת, לפי אי שיוויון המשולש נוכל לפצל את זה באופן הבא:

$$\leq |y_n\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}-y_n|+|y_n-y|=|y_n|\cdot|\frac{\sin x_n}{x_n}-1|+|y_n-y|\to 0$$

הסבר לכך שזה שואף בסוף לאפס: $|y_n-y|\to 0$ בגלל ש־$y_n\to y$. בנוסף, $|\frac{\sin x_n}{x_n}-1|\to 0$ משנה שעברה, וכמובן $|y_n|\to y$, מכפלה של אפסית עם מתכנסת שואפת לאפס. קיבלנו סכום אפסים ולכן בסה"כ שואף לאפס כנדרש.

בהצלחה!