תרגיל 5

1. תהי X קבוצה, ונסתכל על האוסף הבא: $\tau = \{A \subseteq X : |A^c| \text{ is infinite}\} \cup \{\emptyset, X\}$
. הויחו/הפריכו: τ מהווה טופולוגיה על X.

2. א. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. נסתכל על האוסף הבא של תתי קבוצות: $\{C = A \cup T\}$ כך ש A היא קבוצה סגורה בטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$, וT היא תת קבוצה של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות האלו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$.
הדרכה: הוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י בדיקה שהקבוצות הסגורות (כלומר $\{C\}$) מקיימות את שלוש התכונות של קבוצות סגורות.
ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר: $O_n = \{n, n+1, n+2...\}$.
נסתכל על האוסף $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$.

- הוכיחו שτ הוא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.
- הוכיחו שτ אינו מטריזבילי.

3. תהי Y קבוצה כלשהי, ו $p \notin Y$. נגדיר $X = Y \cup \{p\}$. נסתכל על האוסף הבא:
$\tau = \{O \subseteq X : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.
א. הוכיחו ש(X, τ) מרחב טופולוגי.
ב. אם $|Y| \leq \aleph_0$, הכיחו ש $\tau = \tau_{disc}$.
ג. בתנאי סעיף ב', הוכיחו שהטופולוגיה מטריזבילית.

4.א. נגדיר שני אוספים של תתי קבוצות של $\mathbb{N}$. $\tau_1 = \{O \subseteq \mathbb{N} : O = \emptyset \vee |O^c| < \infty\}$, $\tau_2 = \{O \subseteq \mathbb{N} : 1 \notin O \vee |O^c| < \infty\}$. הוכיחו ששניהם טופולוגיות על $\mathbb{N}$.
ב. נסתכל על הפונקציות הבאות מ$\mathbb{N}$ ל$\mathbb{N}$: $f = Id$, $g(n) = \begin{cases} 1 & n = 2m+1 \\ 1 + \frac{n}{2} & n = 2m \end{cases}$.
האם הפונקציות רציפות במקרים הבאים: (נמקו)

- $f : (\mathbb{N}, \tau_1) \to (\mathbb{N}, \tau_2)$
- $f : (\mathbb{N}, \tau_2) \to (\mathbb{N}, \tau_1)$
- $g : (\mathbb{N}, \tau_1) \to (\mathbb{N}, \tau_2)$
- $g : (\mathbb{N}, \tau_2) \to (\mathbb{N}, \tau_1)$

5. נגדיר את הישר של סורגנפריי להיות T= כל האיחודים של ב$\mathbb{R}$ של קטעים מהצורה $[a.b)$.

א. הוכיחו שT מהווה טופולוגיה על $\mathbb{R}$.
ב. נסמן את הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$ בτ. הוכיחו ש $\tau \subset T$ (הכלה ממש).
ג. הוכיחו ש$\frac{1}{n} \to 1$ בT

6. תהי נקודה $p \notin \mathbb{R}$. נגדיר $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. נסתכל על האוסף הבא: $\tau = \{O \subseteq X : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.
א. הוכיחו $x_n \to x$ בτ, וY מרחב טופולוגי כלשהו, ו$f : X \to Y$, אז $f(x_n) \to f(x)$.
ב. תנו דוגמא למרחב טופולוגי מטריזבילי Y ופונקציה $f : X \to Y$ שאינה רציפה.
ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים ש(X, τ) אינו מטריזבילי.

7. א. יהי X מ"ט אינסופי, שבו כל הקבוצות האינסופיות פתוחות (אבל לא בהכרח רק הם). הוכיחו שזהו מרחב דיסקרטי.
ב. יהי X מרחב טופולוגי קו־סופי, ונניח שיש בו 3 קבוצות סגוחות (כלומר, גם סגורות וגם פתוחות). הוכיחו שX סופית.
ג. יהי X מרחב טופולוגי אינסופי, שהקבוצה האינסופית היחידה שפתוחה בו היא X. האם X הוא המרחב הטופולוגי הטריוויאלי? (כלומר: $\tau = \{\emptyset, X\}$).

8. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:
א. הטופולוגיה טריויאלית.
ב. לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

9. תהי $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ו $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. הוכיחו כי

$$f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$$

היא גם רציפה. (על אותו עקרון, שימו לב לעובדה הבאה: כל פונקציה לתוך מרחב טריויאלי היא רציפה. כל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה).