

חשבון אינפי 1

תרגיל 7- פתרון

1. בדקו את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{k}} \quad (\text{א})$$

נרשום

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sqrt{2 \sin^2 \frac{1}{2k}} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{1}{2k}.$$

הטור הנ"ל אינו מתכנס בהחלט (הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sin \frac{1}{2k} \right|$ מתבדר ע"פ מבחן

השוואה עם הטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$, אולם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \sin \frac{1}{2n} \right|}{\frac{1}{2n}} = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{2n} = 0$ והסדרה $\left\{ \sin \frac{1}{2n} \right\}$ מונוטונית יורדת לאפס, ולכן הטור מתכנס ע"פ משפט לייבניץ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k^3+1}}{\sqrt{k^7+3k+\sqrt[3]{k+2}}} \quad (\text{ב})$$

ע"פ מבחן השוואה עם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ נקבל $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^7+3n+\sqrt[3]{n+2}}} = 0$ ולכן הטור הנבדק מתכנס בהחלט.

$$\frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3-1}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}} + \dots \quad (\text{ג})$$

נראה כי הטור הנ"ל מתבדר. נתבונן ב $S_{2n} = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \frac{2}{k-1}$ ומאחר ו $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \infty$ הטור הנבדק מתבדר.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \quad (\text{ד})$$

נרשום $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots =$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \dots =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(3k-2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k-1} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = S_1 + S_2 + S_3$$

הסכומים S_1, S_2 מתכנסים ע"פ מבחן לייבניץ ו $S_3 = \frac{1}{3} \ln 2$ (טור לייבניץ). לכן הטור הנבדק מתכנס.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k} \quad (\text{ה})$$

מאחר ו $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$, לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות ולכן הטור הנבדק מתבדר.

2. הוכיחו שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{3^k}$ מתכנס וחשבו את סכומו עם דיוק 0.01
 נראה תחילה כי הסדרה $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת. באמת, $\frac{n}{3^n} > \frac{n+1}{3^{n+1}}$ מתקיים
 אם $3n > n+1$, כלומר לכל n טבעי. בנוסף, ברור כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$. לכן, ע"פ לייבניץ, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{3^k}$ מתכנס.

כעת, $|r_k| < \frac{k+1}{3^{k+1}} \leq 0.01$ עבור $k = 5$ (מינימלי). לכן הסכום עם דיוק 0.01
 הינו $S = \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^k k}{3^k} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{3}{27} + \frac{4}{81} - \frac{5}{243} = -\frac{47}{243} = -0.19$

3. הוכיחו:

(א) אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k^2$ מתכנס בהחלט
 נראה תחילה כי מהתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נובע כי הסדרה $\{a_n\}$ חסומה.
 נניח בשלילה שאינה חסומה. אזי, לכל n קיים n_k כל ש $a_{n_k} > n$. לכן
 קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ שאינה מתכנסת לאפס, בסתירה לכך
 שעבור טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס מתקיים בהכרח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. לפיכך,
 קיים $M > 0$ כך ש $|a_n| \leq M/(\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2)$ לכל n טבעי.
 לכן $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|/k^2 \leq M$, ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k^2$ מתכנס בהחלט (סדרת
 הסכומים החלקיים שלו מונוטונית עולה וחסומה).

(ב) אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בתנאי והטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס בהחלט, אזי הטור
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ מתכנס בהחלט

נניח כי $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = B$. מהתכנסות בתנאי של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נובע כי קיים
 $M > 0$ כך ש $|a_n| \leq M/B$ לכל n טבעי. לכן $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq M$ ולכן
 הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ מתכנס בהחלט.