פתרון תרגיל בית 2 - תורת גלואה

סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1. שחקו במשחק Euclid the game (http://euclidthegame.com) עד שלב 6 לפחות.
[חלק זה אינו להגשה].

שאלה 2. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\rho_3)=\mathbb{Q}(\rho_3)=\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$. כאשר $\rho_3=e^{\dfrac{2\pi i}{3}}$ שורש יחידה 3 פרימיטיבי.

פתרון. נשים לב ש $\rho_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ולכן ברור ש $\mathbb{Q}(\rho_3)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{3},\rho_3)\subseteq\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$.
נראה ש $i\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\rho_3)$ ובזה סיימנו (בגלל מינימליות).
בגלל ש $\mathbb{Q}(\rho_3)$ הוא שדה $\overline{\rho_3}=\rho_3^{-1}\in\mathbb{Q}(\rho_3)$ ואז גם $\rho_3-\overline{\rho_3}=2iIm(\rho_3)=\sqrt{3}i\in\mathbb{Q}(\rho_3)$.
(יש עוד דרכים לראות את זה כמובן...).

שאלה 3. יהי $p(x)\in F[x]$ פולינום אי-פריק מדרגה n.
אנחנו יודעים ש $E=F[x]/\langle p(x)\rangle$ הוא הרחבה של F. הוכיחו כי $[E:F]=n$ ע"י מציאת בסיס מפורש.

פתרון. נקח בסיס של E להיות $\left\{\overline{1},\overline{x},\overline{x^2},\ldots,\overline{x^{n-1}}\right\}$.
זה פורש כי אם נרשום $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ אז בE מתקיים $\overline{x^n}=-a_0\cdot\overline{1}-a_1\overline{x}-\cdots-a_{n-1}\overline{x^{n-1}}$ כלומר שהוא צירוף לינארי של שאר החזקות.
באופן דומה כל החזקות הגבוההות של $\overline{x}$ הם צירוף לינארי של הבסיס שבחרנו, ולכן גם כל פולינום אפשר להציג בE כפולינום מדרגה לכל היותר $n-1$. ולכן הקבוצה פורשת.
זה בת"ל כי אם נניח $\overline{b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}}=\overline{0}$ בE זה אומר ש $b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}\in\langle p(x)\rangle$ כלומר ש $p(x)\mid b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$ אבל $p(x)$ הוא מדרגה n ולכן זה לא אפשרי.

שאלה 4. **(בונוס)**

נניח $F \subseteq \mathbb{R}$ שדה של מספרים ברי בנייה (לאו דוקא כולם).
נאמר שישר הוא "ישר של F" אם בנינו אותו בעזרת 2 נקודות מ$F \times F$.
נאמר שמעגל הוא "מעגל של F" אם בנינו אותו בעזרת 2 נקודות מ$F \times F$.
הוכיחו כי אם 2 ישרים של F נחתכים, נקודת החיתוך היא ב$F \times F$.
הוכיחו כי אם ישר של F ומעגל של Fנחתכים, נקודת החיתוך היא ב$F[\sqrt{e}] \times F[\sqrt{e}]$ עבור איזשהו $e \in \mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם 2 מעגלים של Fנחתכים, נקודת החיתוך היא ב$F[\sqrt{e}] \times F[\sqrt{e}]$ עבור איזשהו $e \in \mathbb{R}$.

פתרון. ראשית נשים לב שאם ישר הוא מעל F אז אפשר לרשום אותו כ$mx + n$ כאשר $m, n \in F$ (כי הם צירוף של הנקודות המגדירות את הישר).
באופן דומה מעגל של F הוא $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ עבור $a, b, r \in F$.
חיתוך של ישר הוא פתרון של $m_1x + n_1 = m_2x + n_2$ שהוא בודאי בF.
חיתוך של שני מעגלים הוא פתרון של פולינום מדרגה 2 ולכן הוא (אולי) כולל שורש של איבר מF, כלומר נמצא באיזושהי הרחבה $F[\sqrt{e}]$.
(אפשר גם ממש לפתור ולראות את זה).