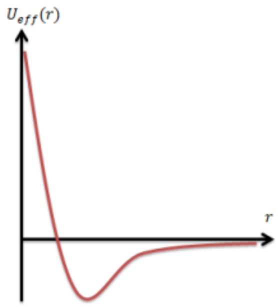
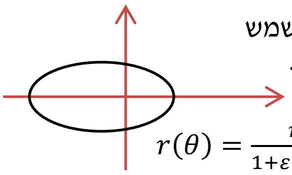
הרצאה XXII- מכניקה

בשיעור קודם הגדרנו $\vec{L}=m\bar{r}\times\bar{v}$ וגם הראנו שמתקיים $\frac{dL}{dt}=\bar{\tau}=\bar{r}\times\bar{F}$. התחלנו גם לדבר על חוקי קפלר, והוכחנו את החוק השני של קפלר. כשקפלר קיבל את החוק השלישי שלו, הוא לא ידע על חוק הגרביטציה העולמי של ניוטון, וממנו הסיק את החוק האמפירי (ניסויי) שלו. אנחנו נוכיח בעזרת החוק של קפלר את חוק הגרביטציה העולמי של ניוטון.

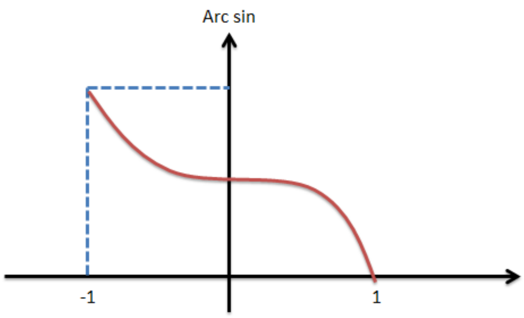




מערכת השמש בנויה כך שמסלולה של כל פלנטה היא אליפטית, כאשר השמש נמצאת באחד המרכזים. בציור משמאל השמש נמצאת בראשית הצירים. נסמן את המרחק בין שתי המוקדים ב$2c$. אורך מחצית הציר הגדול הוא a, ומחצית הציר הקטן יסומן ע"י b. הוכחנו בתרגול שמתקיים $r(\theta)=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$ כאשר אנחנו מגדירים $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $r_0=\frac{b^2}{a}$. באופן כללי גם כן מתקיים $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{eff}(r)$ כאשר $U_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}+U(r)$ ומתקבלת דיאגרמת אנרגיה פוטנציאלית שמופיעה מימין.

כמו כן, ידוע שמתקיים $\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}=+\frac{\varepsilon r_0\sin\theta\dot{\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}=\frac{\varepsilon r_0\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\frac{L}{mr^2}$. אם נציב הכל בביטוי הקודם נקבל $E=\frac{1}{2}m\frac{\varepsilon^2r_0^2\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^4}\frac{L^2}{m^2}\frac{(1+\varepsilon\cos\theta)^4}{r_0^4}+\frac{L^2}{2m}\frac{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}{r_0^2}+U(r)=\frac{\varepsilon^2r_0^2\sin^2\theta}{2mr_0^2}+\frac{L^2}{2m}\frac{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}{r_0^2}+U(r)=U(r)+\frac{L^2}{2mr_0^2}[\varepsilon^2r_0^2\sin^2\theta+1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta]=U(r)+\frac{L^2}{2mr_0^2}[\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta+1]=U(r)+\frac{L^2}{2mr_0^2}(\varepsilon^2-1)+\frac{L^2}{2mr_0^2}2(\varepsilon\cos\theta+1)=U(r)+\frac{L^2}{2mr_0^2}\frac{r_0}{r}+\frac{L^2}{2mr_0^2}(\varepsilon^2-1)=U(r)+\frac{L^2}{2mr_0^2}(\varepsilon^2-1)+\frac{L^2}{mr_0}\frac{1}{r}$. יש לנו כאן בעיה של תלות בr. אבל ידוע שיש שימור אנרגיה! לכן בהכרח ש$U(r)=-\frac{L^2}{mr_0}\frac{1}{r}\propto-\frac{1}{r}$. לכן מכאן שמתקיים $U(r)=-\frac{GMm}{r}$ ועבור הכוח מתקיים $F\propto-\frac{1}{r^2}$ וגם $F\propto-\frac{Mm}{r^2}$

ע"פ הפיתוח מתקיים $-\frac{L^2}{mr_0}\frac{1}{r}=-\frac{GmM}{r}$ ולכן $r_0=\frac{L^2}{GMm^2}$ והמשמעות היא הרדיוס של המסלול המעגלי בעל אותו L.
כמו כן מתקיים $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2mr_0^2E}{L^2}}=\sqrt{1+\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}$. וזה משלים תאת הפתרון של בעיית קפלר. בשביל לחשב את a נסמן אותו כך על מנת להציב $a=\frac{r_0}{1-\varepsilon^2}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2a}{a^2-c^2}=a$ ונקבל גם שהוא שווה $a=\frac{L^2}{GMm}\left(E\frac{2mr_0^2}{L^2}\right)^{-1}=-\frac{L^4}{2GMm^3E}\frac{G^2M^2m^4}{L^4}=-\frac{GMm}{2E}$.
כעת נבטא את b בצורה דומה $b=\frac{r_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\cdots=\frac{L}{\sqrt{-2mE}}$ ושוב נשים לב שE הוא שלישי, ככה נובע מהפיתוח הקודם. כעת אנחנו בעצם יכולים להוכיח את החוק השלישי של קפלר. ראשית נחשב את זמן המחזור. אנו יודעים מהרצאה קודמת שהזמן שלוקח לכסות שטח כלשהו $\Delta A=\frac{L}{2m}\Delta t$. ואנחנו רוצים לדעת כמה זמן לוקח לה לכסות את כל האליפסה. בעצם נציב במקום ΔA את השטח של האליפסה, ונקבל $\pi ab=\frac{L}{2m}T$ ואז נקבל $T^2=\frac{\pi^2a^2b^2}{\left(\frac{L}{2m}\right)^2}=\frac{4m^2\pi^2a^3b^2}{aL^2}=\frac{4m^2\pi^2a^3\left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)}{L^2}=\frac{4\pi^2a^3}{GM}$ ומכאן קיבלנו את החוק השלישי, שאומר ש$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=constant$.



איך תראה התנועה אם ε יהיה גדול מאחד? התנועה לא תהיה אליפטית. נניח $\varepsilon\cos\theta=-1$, נקבל שהזווית באינסוף נתונה ע"י המשוואה $\theta_\infty=\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\pm\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ והגרף יהיה זה שמופיע משמאל.

הנקודה הכי קרובה שכדוא הארץ יכול להיות לשמש נקראת פריהליון, והנקודה הכי רחוקה נקראת אפיהליון. עבור לוויינים המושגים נקראים פריג׳י ואפוג׳י. (ג׳י=כדור הארץ, הליון=שמש).

בהרצאה הבאה נחשב את הזווית הקריטית.

בבוחן הבא יכלל החומר עד לתרגיל 10 ועד בכלל.

פינה יהודית: יש הגורסים שהמהר"ל מפראג ביקר במעבדה של קפלר !