אלגברה לינארית 2 תרגול 2

8 באפריל 2021

1 המשך דטרמיננטות

1.1 דטרמיננטה לפי שורה ועמודה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז:

- פיתוח לפי שורה i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}|M_{ij}|$$

- פיתוח לפי עמודה j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}|M_{ij}|$$

כאשר M_{ij}נקרא המינור ה־ij של A, והוא מתקבל מ־A ע"י מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j.

דוגמאות:

1. חשב את

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: נפתח לפי שורה שלישית:

$$|A| = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{3+j}A_{3j}|M_{3j}| =$$

$$(-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 + 52 - 4 = 40$$

2. חשב את

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 0 & 34 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון: נפתח לפי עמודה שנייה, ואז בגלל שני האפסים נקבל:

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} A_{i2} |M_{i2}| = 0 + (-1)^4 4 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 34 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 0 = -320$$

תרגילים נוספים:

1. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה כך ש-

$$\forall i, j : A_{ij} \in \mathbb{Z} \wedge A^{-1}_{ij} \in \mathbb{Z}$$

חשבו את $|A^{16}|$.

פתרון: שלב ראשון: נראה ש- $|A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z}$: נשים לב, בעזרת דטרמיננטה לפי תמורות, שהדטרמיננטה היא סכום של מכפלות של איברי A (עד כדי סימן), ולכן מכיוון שכל איברי A וההופכית שלמים, נקבל שהדטרמיננטה היא סכום של מכפלות של שלמים ולכן הדטרמיננטה שלמה.

שלב שני: נראה ש- $|A|, |A^{-1}| = \pm 1$:

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

קיבלנו שני מספרים שלמים שמכפלתם היא 1, ולכן

$$|A| = |A^{-1}| = \pm 1$$

לבסוף:

$$|A^{16}| = |A|^{16} = (\pm 1)^{16} = 1$$

2. הוכח או הפרך:

(א) תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אזי $|AB| = |BA|$.

(ב) תהיינה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, אזי $|AB| = |BA|$.

(ג) יהי n אי־זוגי, ותהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש־ $AB + BA = 0$. אזי A לא הפיכה או B לא הפיכה.

פתרון: א. הוכחה:

$$|AB| = |A| \cdot |B| \underset{*}{=} |B| \cdot |A| = |BA|$$

כאשר מעבר $*$ נובע מחילופיות בשדה.

ב. הפרכה: ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = A^t$$

ואז:

$$|AA^t| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$|A^tA| = \det \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

הרחבה: אם $m < n$ אז מתקיים: $rank(A), rank(B) \leq m$, ולכן $rank(BA) \leq rank(B), rank(A) \leq m < n$. קיבלנו $AB \in \mathbb{F}^{n\times n}$ עם $rank(BA) < n$, ולכן היא בהכרח לא הפיכה ו־ $|BA| = 0$.

ג. נתון $AB + BA = 0$, נעביר אגפים ונקבל $AB = -BA$, ואז לפי סעיף א:

$$|BA| = |AB| = |-BA| = (-1)^n |BA| \underset{n=2k+1}{=} -|BA|$$

בסה"כ:

$$2|BA| = 0 \Rightarrow |BA| = 0$$

ולכן BA לא הפיכה. אם המכפלה לא הפיכה אז לפחות אחת מהן לא הפיכה. מש"ל.

3. הוכיחו או הפריכו: אם A סימטרית אז מתקיים: A הפיכה אמ"ם $A + A^t$ הפיכה.

פתרון: הוכחה:

$$A \text{ invertible}$$

$$\iff$$

$$|A| \neq 0$$

$$\iff$$

$$|A + A^t| = |A + A| = |2A| = 2^n|A| \neq 0$$

$$\iff$$

$$A + A^t \text{ invertible}$$

4. הוכיחו או הפריכו: A הפיכה אמ"ם $A^3 + I$ הפיכה.
פתרון: הפרכה: ניקח

$$A = -I$$

כמובן A הפיכה, ואילו:

$$A^3 + I = -I + I = 0$$

לא הפיכה.
אפשר גם בכיוון ההפוך: $A = 0$ ואז $A^3 + I = I$.