הוכחת משפט רמזי

יהי V גרף אינסופי. יהי U על מסנן לא ראשי על קבוצת קודקודי הגרף (ראיתם שקיים), ותהי $c : [V]^2 \to \{1, ..., k\}$ צביעה של הגרף השלם.
יהי $v \in V$. לכל $i \in \{1, ..., k\}$ תהי $A_i(v)$ קבוצת כל הקודקודים המחוברים לv בצבע i. אזי:

$$V \setminus \{v\} = A_1(v) \cup ... \cup A_k(v)$$

U לא ראשי, לכן $V \setminus \{v\} \in U$, ולכן יש i כך ש $A_i(v) \in U$. נסמן $\chi(v) = i$.
קיבלנו צביעה χ של V בk צבעים.
נשים לב ש$V \in U$, כי U מסנן.
כמו כן,

$$V = \chi^{-1}(1) \cup ... \cup \chi^{-1}(k)$$

לכן יש i כך ש $\chi^{-1}(i) \in U$.
נסמן $A = \chi^{-1}(i)$.
נראה שיש תת גרף אינסופי שלם מצבע i:
נקח

$$v_1 \in A$$

$$v_2 \in A \cap A_i(v_1)$$

$$v_3 \in A \cap A_i(v_1) \cap A_i(v_2)$$

וכו'.
בכל שלב הבחירה אפשרית כי חיתוך של מס' סופי של קבוצות בעל מסנן נמצא בעל מסנן, ובפרט לא ריק.
הגרף השלם על $\{n_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ הוא מצבע i:
לכל $n < m$, $v_m \in A_i(v_n)$, ולכן $c(v_n, v_m) = i$.